

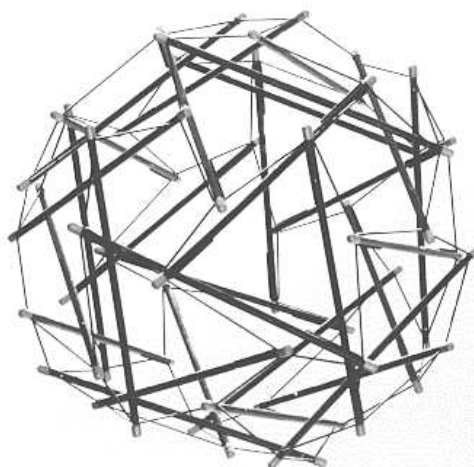
Tensegrities, of houtje-touwtje-figuren

Hoewel onbekend bij de meesten, zijn tensegrities fascinerende bouwsels. Dit artikel gaat op een speelse manier in op de wiskundige aspecten: hoe kunnen we tensegrities klassificeren op structuur? Er wordt een nieuwe aanzet gegeven tot een oplossing, maar deze loopt al snel tegen het probleem van zware (lees: NP-complete) methoden aan.

Een *tensegrity* is een structuur die zijn integriteit behoudt onder spanning. Het concept is van Kenneth Snelson (www.kennethsnelson.net), een Amerikaanse beeldhouwer, en is populair geworden door de befaamde architect Buckminster Fuller. De voornaamste toepassingen liggen dan ook in de bouwkunde: vanwege hun geringe gewicht, opvouwbaarheid, en de geringe invloed van uitwendige krachten, zijn tensegrities ideaal voor bijvoorbeeld daken van voetbalstadia. Maar ook in de ruimtevaart liggen toepassingen, en in de celbiologie.

Tensegrities bestaan slechts uit twee elementen: balken en kabels. Tenminste, zo worden ze in de bouwkunde genoemd. Maar je kunt ook zelf speelgoedvarianten construeren uit houtjes en touwtjes, en ze hebben dan ook wat weg van Hobermann-spheres en Buckyballs. Als je het goed doet, kun je de touwtjes zelfs vervangen door elastiekjes, zonder dat dat invloed heeft op het uiterlijk: in plaats van een rigide bouwwerk krijg je er dan een die vanzelf zijn vorm weer aanneemt na een val of een mep. (Maar daarover later meer.) De touwtjes houden dus tegelijkertijd het hele bouwsel bijeen maar de houtjes uit elkaar.

De figuren zijn niet alleen fascinerend om te zien (Snelson maakt er kunstwerken van) en om mee te spelen, maar ook wiskundig interessant: wat is een tensegrity eigenlijk, wiskundig gezien? Hoe kan het zijn vorm behouden? Kunnen we ze klassificeren? Velen is groepentheorie aangeleerd aan de hand van de 17 behangpatronen. Zo lijken ook de wat onbekendere tensegrities geschikt om mooie wiskunde met een fraai voorbeeld te ondersteunen.



Een tensegrity met 30 houtjes en 70 touwtjes.

1. Wat is een tensegrity?

Laten we maar meteen beginnen met de definities en eisen. Een tensegrity is een verzameling punten $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^3$.

Tussen twee van zulke punten loopt ofwel een houtje, ofwel een touwtje, ofwel niks. Dit stellen we voor met de ‘typefunctie’ $t : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \{\text{houtje}, \text{touwtje}, \text{niks}\}$.

Elke verbinding heeft een bepaalde ‘stijfheid’; dit modelleren we met een functie $c : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$. Voor elastiek zal c kleiner zijn dan voor staalkabel, want de eerste ‘trekt minder hard’ dan de laatste bij gelijke uitrekking. Uiteraard is $c(i, j) = 0$ als v_i en v_j niet verbonden zijn. (Natuurkundigen zullen c als de veerconstante herkennen.)

Tenslotte veronderstellen we een functie $r : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die de rustlengte van elke verbinding representeert. Ten allen tijde hebben we dus voor elke $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$t(i, j) = \text{houtje} \Rightarrow \|v_i - v_j\| \leq r(i, j)$$

$$t(i, j) = \text{touwtje} \Rightarrow \|v_i - v_j\| \geq r(i, j)$$

Een houtje ‘duwt een punt weg’, terwijl een touwtje ‘aan een punt trekt’; het lijkt misschien verassend dat houtjes uit kunnen rekken, maar in de bouwkunde worden vaak telescopische staven gebruikt. Daarom is het ook nutteloos zowel een houtje als een touwtje tussen twee punten te hebben, en zijn onze t, c en r dus welgedefinieerd.

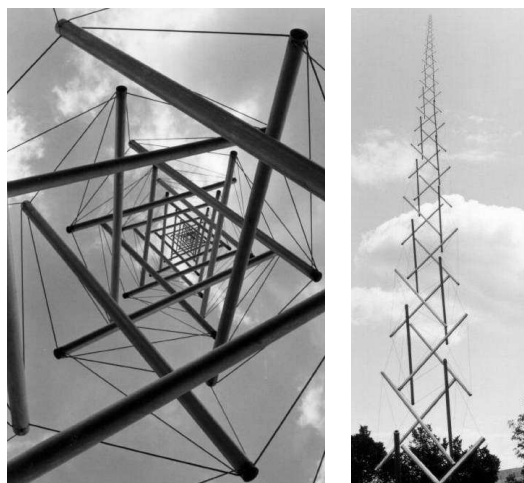
Een fatsoenlijke tensegrity is stabiel, wat wil zeggen dat bij elk punt de trekkende kracht de duwende opheft. Een stabiele tensegrity voldoet volgens Hooke dus aan

$$(1) \quad \forall_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n c(i, j) \cdot (v_i - v_j - r(i, j) \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}) = 0$$

We eisen ook dat een tensegrity samenhangend is. Bovendien mogen de houtjes elkaar niet aanraken, in het bijzonder niet in hun eindpunten. Dit weer om bouwkundige redenen: kogelgewrichten zijn moeilijk. Zo’n gewricht kunnen we echter gemakkelijk simuleren, in onderstaand plaatje zijn bijvoorbeeld 3-gewrichten gesimuleerd door touwtjes:



De hoofdvraag waarin we nu geïnteresseerd zijn, is ‘welke tensegrity-structuren $(v_1, \dots, v_n, t, c, r)$ voldoen aan (1) voor vaste $n \in \mathbb{N}$?’. En ‘structuur’ bedoelen we hierbij in de groepentheoretische zin: als je een tensegrity v_1, \dots, v_n hebt, voldoet bijvoorbeeld een willekeurige permutatie daarvan die t, c en r respecteert natuurlijk ook, maar dat vinden we flauw.



Snelson’s ‘Needle Tower’

2. Eerder werk

Als je echter op zoek gaat in de literatuur, zul je hier weinig over vinden. Het meeste is gericht op ingenieurs [2, 3]. Maar zoals gezegd zijn er ook toepassingen in de celbiologie [4, 5]. En in de ruimtevaart; er zijn zelfs theorieën dat het universum zelf de structuur van een tensegrity heeft – zwarte gaten leveren compressie (houtjes), terwijl gelinkte melkwegstelsels spanningen daartussen vormen (touwtjes). Af en toe kom je exotischere toepassingen zoals [6] tegen, waarmee ingenieurs met op tensegrities gebaseerde filmbeelden kunnen inschatten hoe stevig een constructie is. Ook stuit je herhaaldelijk op een cultus die gebaseerd is op het idee dat tussen mensen ook aantrek- en afstootkrachten werken.

Wiskundig is er echter weinig verricht. Het enige noemenswaardige werk is dat van Connelly en Back [1]: zij maakten een catalogus van tensegrities. Het idee hierachter is in zekere zin ‘top-down’. Ze schrijven een symmetriegroep voor, en gaan vervolgens na welke tensegrity-structuren hieraan voldoen. Dit levert een alleraardigste lijst op, met plaatjes en al te vinden te mathlab.cit.cornell.edu/visualization/tenseg/.

Naast voldoende voorwaarden stellen wij ons echter ook noodzakelijke ten doel. Dat noodzaakt ons tot grovere methoden, meer in een ‘bottom-up’ stijl.

3. Nieuwe aanpak

We gebruiken dan ook een andere aanpak dan Connelly en Back in [1]. Ten eerste scheiden we de structuur van een tensegrity van zijn realisatie. Mits juist uitgevoerd, heeft dat als voordeel dat de klassificatie gemakkelijk verloopt, en daarna enkel nog een filtering op daadwerkelijk realiseerbare klassen gedaan hoeft te worden.

De structuur leggen we vast in een graaf. Om precies te zijn, een ongerichte, complete, rib-gekleurde graaf. Als punten van de graaf nemen we simpelweg $1, \dots, n$. De ribbe $\{i, j\}$ geven we ‘kleur’ $t(i, j)$. We spreken vervolgens af welke symmetrieën we toelaatbaar achten, en laten zien dat deze symmetriegroep werkt op onze grafen. Vervolgens kunnen we de symmetrieklassen bepalen als de banen van de collectie grafen onder de groep.

Maar dan hebben we teveel klassen: het vastleggen van de tensegrity-structuur in een graaf lijkt weliswaar heel natuurlijk, het is ook enkel dat. De graaf zegt alleen iets over verbondenheid, maar niets over fysieke realiseerbaarheid. We moeten dus nog een eliminatieproces toepassen op de klassen. Dit komt erop neer dat we voor elke klasse moeten nagaan of er $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^3$ zijn die voldoen aan (1), c en r .

4. Grafen en groepen

Ten eerste zullen we n maar eens vastleggen. Uit de stabiliteitseis (1) volgt direct dat er geen punten zijn die enkel door touwtjes bereikt worden. En omdat verder houtjes disjunct zijn, weten we dus dat elk houtje precies twee

punten met zich meebrengt, en dat dat dus ook alle punten zijn. Noodzakelijkerwijs moet n dus even zijn, laten we zeggen $n = 2N$, waarbij dus N het aantal houtjes is.

Vervolgens kunnen we de $2N$ punten in de graaf een standaard-oriëntatie toebedelen, omdat we weten dat er N houtjes zijn. Deze normaalvorm neemt alvast iets van de keuzevrijheid in t weg. We kiezen de punten zó, dat precies tussen $2i - 1$ en $2i$ een houtje loopt: $t(2i - 1, 2i) =$ houtje (zie figuur 1).

Merk trouwens even op dat het niets uitmaakt of we nu met de complete graaf werken, of dat we de niks-verbindingen gewoon uit de graaf weglaten.

Zij nu Γ de verzameling van al deze complete, ribgekleurde grafen met $2N$ punten. Een element γ van Γ is dus een functie, die aan een ribbe $\{i, j\}$ zijn ‘kleur’ $t(i, j)$ toekent. Zij verder $\tilde{\Gamma}$ de deelverzameling van Γ van alle grafen op normaalvorm:

$$\tilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma : \forall_{1 \leq i \leq N} [\gamma(\{2i - 1, 2i\}) = \text{houtje}]\}.$$

Met S_X noteren we de symmetrische groep op de eindige verzameling X , dus de verzameling permutaties van X met als operator functiecompositie. Hierbij zullen we $S_{\{1,2,\dots,k\}}$ afkorten tot S_k . Herinner dat een groepswerking van een groep G op de verzameling Γ een homomorfisme $G \rightarrow S_\Gamma$ is, dus een afbeelding die de groepsstructuur bewaart. Men gaat eenvoudig na dat permuteren van de punten een groepswerking is op Γ . Met andere woorden: S_{2N} werkt op Γ .

We zouden nu direct kunnen proberen de banen van Γ onder S_{2N} te bepalen. Het blijkt echter dat dit erg inefficient is qua rekenwerk. Maar nadat we de klassen bepaald hebben, gaan we toch de realiseerbare daaruit filteren. Als dus de niet-realiseerbare tensegrity-structuren eerder in het proces kunnen elimineren, scheelt dit alleen maar rekenwerk.

En we kunnen net zo goed wat heuristisch eerder toepassen. Een goed idee is om houtjes te permuteren in plaats van punten (S_N in plaats van S_{2N}). Maar omdat een permutatie van punten ook de eindpunten van een houtje kan verwisselen, moeten we naast alle houtjes permuteren ook elk houtje apart omkeren (met S_2). Deze combinatie heet het kransproduct [7].

Definitie Zij G en H groepen, waarvan H op een verzameling X werkt. Schrijf G^X voor de verzameling functies $X \rightarrow G$. We maken nu van G^X een groep door de operatie van G puntsgewijs door te voeren: voor $f, g \in G^X$ definiëren we $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, waarbij de \cdot in de rechterzijde de operatie van G is. Nu werkt H op G^X door de operatie $hf(x) = f(hx)$ voor $f : X \rightarrow G$, $h \in H$ en $x \in X$. Het



FIGUUR 1. Standaard-oriëntatie van punten, en de zes gevonden structuren voor 4 houtjes en hoogstens 2 touwtjes ($N = 4, K \leq 2$)

kransproduct van G en H , notatie $G \wr H$, is het direct product $G^X \times H$.

Het is de grootste ondergroep van S_X die de partities van X , geïnduceerd door de actie van H op X , invariant laat. Net als S_{2N} op Γ werkt, werkt ook $S_2 \wr S_N$ op $\tilde{\Gamma}$. We bewijzen nu dat we door houtjes in plaats van punten te permuteren geen essentiële mogelijkheden verliezen.

Stelling. Door $S_2 \wr S_N$ te gebruiken in plaats van S_{2N} verliezen we geen banen. Preciezer: representanten van banen van $\tilde{\Gamma}$ onder $S_2 \wr S_N$ vormen tevens een compleet stel baanrepresentanten voor Γ onder S_{2N} .

BEWIJS. $S_2 \wr S_N$ werkt op $\tilde{\Gamma}$, en dus zijn er onder deze groep een aantal banen $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_k$ voor zekere $k \in \mathbb{N}$. Elke baan bevat nu een representant (op normaalvorm!): er zijn $\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{O}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{O}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k \in \tilde{O}_k$ zodat $\tilde{\gamma}_i(\{2j - 1, 2j\}) =$ houtje voor $1 \leq i \leq k$ en $1 \leq j \leq N$.

We zagen al dat ook S_{2N} op Γ werkt, en dat er onder S_{2N} dus ook banen O_1, O_2, \dots, O_l zijn voor zekere $l \in \mathbb{N}$.

Het is triviaal dat iedere S_{2N} -baan O een γ op normaalvorm bevat. Maar dan bevat O ook de baan \tilde{O}_i van γ onder de werking van $S_2 \wr S_N$ op $\tilde{\Gamma}$, en daarmee ook diens representant $\tilde{\gamma}_i$.

Stel nu dat O ook nog een $\tilde{\gamma}_j$ bevat. In dat geval geldt voor $\pi \in S_{2N}$ dat $\pi(\tilde{\gamma}_i) = \tilde{\gamma}_j$. Maar dan laat π de partitie $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2N - 1, 2N\}$ invariant, en is π dus een element van $S_2 \wr S_N$. Dus moet wel $i = j$!

De $\tilde{\gamma}_i$ vormen dus inderdaad een compleet stel baanrepresentanten voor S_{2N} , en we mogen ons inderdaad beperken tot het berekenen van de $\tilde{\gamma}_i$. \square

Merk op dat de groep G die we zo krijgen en willen laten werken op $\tilde{\Gamma}$ voortgebracht wordt door de permutaties $(1\ 2), (1\ 3)(2\ 4)$ en $(1\ 3 \dots 2N - 1)(2\ 4 \dots 2N)$.

We hebben nu dus een kanonieke groep G , die op een natuurlijke manier alle symmetrieën van onze grafen bevat. Bekijk nu de collectie $\tilde{\Gamma}$ van alle grafen op normaalvorm, en laat G hierop werken. Wat we nu zoeken zijn de banen van $\tilde{\Gamma}$ onder G . Eén representant van elke baan is zelfs voldoende.

Om dit exponentiele probleem aan te pakken gebruiken we de methode van ‘tabular programming’: we beginnen bij de ‘blaadjes van de recursie’ en combineren die opwaarts, terwijl we onderweg alles weggooien wat we niet meer nodig hebben. In dit geval verdelen we de gezochte klassen onder in aantal touwtjes K , en bepalen de verzameling representanten van banen incrementeel. De

structuur waarvan we gebruikmaken is die van de normaalvorm.

Voor de beginwaarde $K = 1$ is het duidelijk dat er maar één tensegrity-structuur is met N houtjes en 1 touwtje: het maakt niet uit tussen welke twee houtjes het touwtje is gespannen (herinner dat een touwtje niet tussen dezelfde twee punten als een houtje kan lopen).

Dan gaan we alle klassen met K touwtjes uitbreiden tot $K + 1$ touwtjes. Neem een klasse met K touwtjes. We fixeren deze eerste K touwtjes, en bekijken waar het volgende touwtje gespannen kan worden. Dus voor elke klasse met K touwtje krijgen we nul of meer klassen met $K + 1$ touwtjes.

Hoewel er bij N houtjes maar $2N(N - 1)$ touwtjes mogelijk zijn, hoeven we niet verder te gaan dan halverwege, $K = N(N - 1)$. Dit omdat een tensegrity met $K > N(N - 1)$ een gelijke structuur heeft als een tensegrity met $N(N - 1) - K$ touwtjes. We hoeven alleen maar de touwtjes te ‘inverteren’, dat wil zeggen touwtjes verwijderen waar die waren, en invoegen waar ze niet waren. En dat is veel gemakkelijker dan de tweede helft net zo berekenen als de eerste.

We hebben dus het volgende algoritme: zij N gegeven, en G onze symmetriegroep. Begin met $K = 1$ en neem als eerste touwtje $t_1 = \{1, 3\}$. Zet $R = \{G\}$. Fixeer nu het eerste touwtje, dat wil zeggen, beschouw als nieuwe groep $G := \bigcap_{g \in G} \text{Stab}_{\{t_1\}}(g)$, en neem $R := R \cup G$, $K := K + 1$. Herhaal dit proces totdat $K = N(N - 1)$, en bepaal de tweede helft door ‘touwtjes-inversie’.

Als we dit procédé uitvoeren voor $N = 4$ zolang $K \leq 2$, krijgen we inderdaad wat we intuïtief zouden verwachten, zie figuur 1.

Met het lemma van Burnside en de daarop voortbouwende stelling van Polya kunnen we nu het aantal banen (en daarmee het aantal gevonden representanten) verifiëren [9].

Lemma. (Burnside) *Stel dat een eindige groep G op een verzameling X werkt. Dan is het aantal banen van X onder G gelijk aan $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Stab}_X(g)|$.*

Stelling. (Polya) *Stel dat een eindige groep G op een verzameling X werkt. Dan is het aantal banen van X onder G met k kleuren gelijk aan $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{\#^c(g)}$. Hierbij stelt $\#^c(\pi)$ het minimum aantal cyclen van de permutatie π voor.*

Helaas is het bewijs van het lemma van Burnside een kwestie van tellen en sommige objecten daarbij weg te laten, en is niet constructief. Maar we kunnen het nog steeds gebruiken ter verificatie.

5. Realisatie

Goed, we hebben dus nu alle theoretisch mogelijke klassen van tensegrity-structuren met N houtjes. Maar we hebben ook alleen pas die structuur. In termen van onze definities:

we hebben alleen pas rekening gehouden met de type-functie t , en nog niet met de fysische beperkingen c , r en (1). Uit al deze klassen moeten we nog degenen pikken die echt mogelijk zijn, dus degenen waarvoor c en r bestaan die aan (1) voldoen.

Laten we eerst maar eens aannemen dat c constant is (behalve natuurlijk de verplichte $c(i, j) = 0$ zodra $t(i, j) = \text{niks}$). Dat is niet zo onredelijk, want als je een tensegrity bouwt heb je toch niet de neiging om hier weer eens elastiek, daar weer eens staalkabel te gebruiken.

We doen dus even net of v_1, \dots, v_n en r variabel zijn, en proberen hiervoor de stabiliteitsvergelijkingen (1) op te lossen.

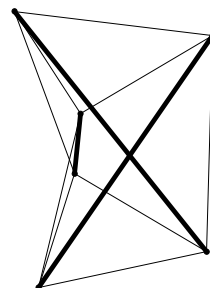
Het slechte nieuws is nu dat dit nog niet meevalt. Het gaat hier om een vectoriële stelsel non-lineaire vergelijkingen. Daar kennen wij helaas geen specifieke oplossingsmethode voor. Dus grepen we maar naar een generieke methode, die van Gröbner-bases. Helaas is deze methode dubbel-exponentieel: als er n onbekenden zijn, kost het $\mathcal{O}(2^{2^n})$ elementaire rekenstappen om een oplossing te vinden.

6. Resultaten

Dit alles is uitgeprogrammeerd in MAGMA, een computer-algebra-systeem, dat weet heeft van zowel groepen als Gröbner-bases. MAGMA’s algoritmen staan bekend als zeer snel, en het is uitermate moeilijk om zelf met snellere op de proppen te komen.

En omdat Gröbner-bases inherent ‘moeilijk’ zijn, heeft ook MAGMA hier helaas last van: met een weekend rekentijd kwamen we niet verder dan $N = 4$, dus tensegrities met 4 houtjes.

Zo bleek dat er maar één essentiële tensegrity-structuur is met 3 houtjes. Dit is ook meteen de kleinste ruimtelijk construeerbare, en als je wat knutselt met 3 houtjes vind je hem ook vanzelf. Het is wat moeilijk om uit een projectie het object te zien, maar zo ziet het er ongeveer uit:



Met 4 houtjes kun je twee essentiële verschillende tensegrities maken: beide zijn net als bovenstaande ‘cylinder-vormig’, alleen is de een ‘linkshandig’ en de ander ‘rechtshandig’. Het verschil zit hem in de draaihoek van het bovenvlak.

7. En nu?

Dat valt natuurlijk wel een beetje tegen. Met wat knutselen vind je bijvoorbeeld ook zó een tensegrity met 6 houtjes (namelijk heel symmetrisch, zet de uiteinden van de houtjes maar in de middelpunten van de vlakken van een denkbeeldig dodecaëder).

Wat kan er dan beter? Het is duidelijk dat we de dubbele-exponentieelheid in de realisatie-fase moeten zien te vermijden. Maar hoe? Het lijkt erop alsof we alle informatie die we hebben ook gebruikt hebben. Misschien zijn er toch betere methodes voor dit soort stelsels waar wij toevallig geen weet van hebben? Maar je zou ook kunnen proberen te bewijzen dat het onmogelijk is niet in NP-compleetheid te geraken zonder meer aannames. Anders eerst meer aannames doen om daaruit een patroon te proberen te herkennen? Welke aannames dan?

Misschien is er nog meer fysische heuristiek die we kunnen gebruiken in de realisatie-fase? Technieken als die in [8] lijken veelbelovend. Eenieder die zich geroepen voelt hieraan te werken, nodigen we hier van harte toe uit.

Concluderend kunnen we in ieder geval stellen dat tensegrities zeker wiskundig interessant zijn, al zijn ze niet zo bekend. Met grafen, groepen en algebra hebben we een manier gevonden om tensegrities te klassificeren, zij het geen al te beste manier wat betreft efficiëntie.

Dank. Onze dank gaat uit naar Bernd Souvignier voor vruchtbare discussies over het onderwerp, Jozef Hooman voor begeleiding bij andere presentaties over dit werk, en Lotte Hollands voor nuttige opmerkingen bij het natuurkundige deel.

Referenties

- [1] R. Connelly en A. Back, *Mathematics and tensegrity*, American Scientist, 1998
- [2] D. Williamson en R.E. Skelton, *A general class of tensegrity structures: Topology and prestress equilibrium analysis*, 2001
- [3] R. Connelly en W. Whiteley, *Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks*, SIAM Journal of Discrete Mathematics, 1996
- [4] N. Wang en anderen, *Mechanical behavior in living cells consistent with the tensegrity model*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2001
- [5] S. Wending, C. Oddou, en D. Isabey, *Non-dimensional expression of the stiffening response of tensegrity structure as a function of strain: application to cell mechanics*, Journal of Biomechanics, 1998
- [6] K.A. Liapi, *A visualization method for the morphologic exploration of tensegrity structures*, Proceedings of Information Visualisation, 2001
- [7] H. Straubing, *The wreath product and its applications*, Formal Properties of Finite Automata, 1988
- [8] T.F. Havel, I.D. Kuntz, en G.C. Crippen, *The theory and practice of distance geometry*, Bulletin of Mathematical Biology, 1983
- [9] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969