

*Alles, wat verstandig is, is reeds gedacht,  
men moet slechts proberen het nog eens te denken.*

Goethe

## VOORWOORD

De stelling van Riemann-Roch heeft een lange geschiedenis, waarvan de oorsprong ligt in de complexe analyse. Bernhard Riemann (1826-1866) stelde zich de volgende vraag: “Bestaat er, op een willekeurig (Riemann-) oppervlak  $S$  van genus  $g$ , een rationale functie met een pool van orde ten hoogste één in  $m$  opgegeven punten?” We merken wel op dat het begrip van een Riemann-oppervlak in de tijd van Riemann, helemaal niet zo’n concreet begrip was. Pas in 1913, nadat nieuwe concepten uit de topologie voorhanden waren, kreeg een Riemann-oppervlak een intrinsieke betekenis, onafhankelijk van een inbedding in een projectieve ruimte. Dit geeft reeds aan dat Riemann over een enorme intuïtie beschikte.

Riemann verkreeg gedeeltelijk een antwoord op zijn vraag. We stellen de  $m$  punten voor door middel van een divisor  $D$ . De ruimte van rationale functies die aan de gestelde eisen voldoen, noteren we met  $L(D)$ . De stelling van Riemann geeft de volgende ongelijkheid:

$$\dim L(D) = l(D) \geq \deg(D) - p + 1.$$

Meteen zien we dat voor  $m \geq p+1$ ,  $l(D) \geq 2$ . In dit geval bestaan er rationale functies met polen van orde ten hoogste één. Als  $m \leq p$ , is het in het algemeen niet zo dat er dergelijke functies bestaan. Een leerling van Riemann, G. Roch (1816-1866), stelde de condities op waarvoor dergelijke functies wel bestaan.

In de jaren na Riemanns dood, ontstonden er verschillende scholen in de algebraïsche meetkunde. Elk van die scholen wilde het werk van Riemann uitdrukken in zijn eigen taal, en bewijzen volgens zijn eigen methoden. Belangrijk voor de algebraïsche meetkunde is het werk omstreeks 1882 van L. Kronecker(1823-1891), R. Dedekind(1831-1916) en H. Weber(1842-1913). In hun werk legden zij de basis voor vele moderne concepten.

Het werk van Dedekind en Weber spitste zich vooral toe op algebraïsche krommen. Onder andere wilden zij de resultaten van Riemann en Roch bekomen vanuit een algebraïsch oogpunt.

Riemann hechte aan elk Riemann-oppervlak  $S$  het functieveld  $K$  van  $S$ . Dedekind en Weber vertrokken van dit functieveld  $K$  en reconstrueerden het Riemann oppervlak. Ze voerden divisoren, valuaties, en differentiaal in op dit abstract oppervlak en bekwamen een algebraïsche definitie voor het genus  $g$  van een kromme. Met deze opbouw lag de algemene vorm van de stelling van Riemann-Roch binnen handbereik: zij  $K$  een eindige veldextensie van  $\mathbb{C}(z)$ , en  $D$  een willekeurige divisor, dan geldt

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

De algebraïsche school ondernam pogingen om de resultaten te veralgemenen, maar kreeg weinig gehoor. De tijd was nog niet rijp voor een hoge mate van abstractie. De ontwikkeling van de abstracte algebra begon omstreeks 1900 en vond onmiddellijk zijn weerslag in de algebraïsche meetkunde. Zo bewees F.K.Schmidt(1901- ) in 1929 dat de stelling van Riemann-Roch, mits een paar aanpassingen, ontdaan kon worden van zijn complex-analytische achtergrond. Hij bewees de stelling van Riemann-Roch met als grondveld een algebraïsch gesloten veld van willekeurige karakteristiek.

Een volgende stap was pas mogelijk na 1945, wanneer de algebraïsche topologie en differentiaalmeetkunde een opgang kenden. J. Leray(1906-) voerde begrippen als schoven, cohomologie van schoven en spectraalrijen in, waarmee het mogelijk werd de stelling van Riemann-Roch te veralgemenen tot variëteiten van willekeurige dimensie.

De formulering van deze stelling werd in de loop van het jaar 1953 door J.P. Serre (1926-), D. Spencer (1912-), K. Kodaira (1915-) en F. Hirzebruch (1927-) bekomen. Het is een synthese van Hodge-theorie, de invarianten-theorie opgesteld door de Italiaanse meetkundigen en de cohomologie van schoven. Voor een kromme  $\Gamma$  heeft de stelling de vorm:

$$\chi(D) = \deg(D) - g + 1.$$

Tenslotte merken we op dat Hirzebruch op het eind van 1953 een verdere generalisatie doorvoerde. De formule legt het verband tussen de Euler-Poincaré karakteristiek en Chern-klassen.

Een andere geschiedenis is deze van de schema's. De geschiedenis begint bij A. Weil(1906-) in 1946. Hij ontdeed het variëteitsbegrip van de projectieve meetkunde. Een variëteit wordt op deze manier iets op zichzelf staand, dus zonder inbedding in een of andere projectieve ruimte. Op deze abstracte variëteiten kan een topologie gedefinieerd worden, de Zariski-topologie (O. Zariski(1899- )). Hiermee maakte Serre omstreeks 1954 de zogenaamde geringde ruimten. Wat deze ruimten verschillend maakt van schema's, is het feit dat Serre zich nog niet waagde aan te grote veralgemeningen. De algebraïsche structuren waar Serre van vertrok, waren immers gereduceerde algebra's van eindig type over een algebraïsch gesloten veld.

Drie jaar later, in 1957, gaat een immens wiskundig project van start. P. Cartier(1932-) en A. Grothendieck(1928-) stelden voor, de structuren van Serre te beschouwen, vertrekkend van om het even welke commutatieve ring! Dit project omvat alle voorgaande ontwikkelingen en leidt tot een gehele veralgemening van de algebraïsche meetkunde. De objecten die men bestudeert zijn de schema's, objecten in de zin van Serre, maar nu zonder ook maar enige restrictie op de basisring.

Waar het nu in deze thesis over gaat, is een synthese van deze twee ontwikkelingen. We willen de stelling van Riemann-Roch bewijzen voor krommen. En, we willen krommen zien als schema's. Het ligt voor de hand dat de stelling van Riemann-Roch niet steeds geldt voor willekeurige schema's. Daarvoor zijn schema's te algemeen. Wat we willen bewijzen, is dat de stelling geldig is voor integrale, gesepareerde schema's van eindig type over een algebraïsch gesloten veld. Dit vormt het onderwerp van hoofdstuk 3.

---

In hoofdstuk 1 wordt het begrip van schema's ingevoerd. Dit hoofdstuk heeft een hogere mate van volledigheid dan de overige hoofdstukken. Het is naar mijn mening dan ook belangrijk dit hoofdstuk aandachtig te lezen, om zo een goed beeld te krijgen van het begrip schema. Hoofdstuk 2 behandelt divisoren en reguliere functies op schema's. Hoe divisoren zich veralgemenen op schema's en aan welke eigenschappen ze voldoen, vindt U hier. In hoofdstuk 2 wordt ook een eindigheidsstelling van Serre bewezen, die onmisbaar is voor hoofdstuk 3.

Tenslotte wil ik in de eerste plaats de wiskundigen bedanken die deze theorie opgesteld hebben. Zij legden de basis voor deze thesis. Mijn dank gaat ook uit naar mijn promotor Professor J. Van Geel voor het lezen van mijn teksten en de opbouwende kritiek die daaruit voortkwam. Zeker in deze tak van de wiskunde is een ervaren gids noodzakelijk. Voor het oplossen van 101  $\LaTeX$ -en layoutproblemen ben ik Thomas Unger bijzonder erkentelijk. Van deze gelegenheid maak ik ook graag gebruik om mijn ouders te bedanken. Een student is namelijk niet zelfvoorzienend. Als laatste bedank ik Kristin Van Gestel, omdat ze zonder morren, vier jaar lang mijn wiskunde-verhalen heeft aangehoord.

Aan de lezer: veel leesplezier!

Floris Geerts  
juni 1995

# INHOUDSOPGAVE

<b>Voorwoord</b>	<b>i</b>
<b>1 Schema's</b>	<b>1</b>
1.1 Spectra van ringen . . . . .	1
1.2 Schoven . . . . .	3
Preschoven . . . . .	3
Breukenringen -en modulen . . . . .	4
De structuur preschoof . . . . .	6
Schoven . . . . .	7
De staak van een preschoof . . . . .	9
1.3 Schema's . . . . .	10
Produkt van schema's . . . . .	12
Gesepareerde schema's . . . . .	12
1.4 Gegradueerde ringen en schema's . . . . .	13
Gegradueerde ringen . . . . .	13
Projectieve schema's . . . . .	14
1.5 Abstracte variëteiten . . . . .	14
1.6 Schoven van modulen . . . . .	15
Schoven van modulen . . . . .	15
De projectieformule . . . . .	15
Quasi-coherente schoven . . . . .	16
<b>2 Divisoren op schema's</b>	<b>18</b>
2.1 Reguliere en rationale functies op schema's . . . . .	18
Reguliere functies . . . . .	18

Rationale functies . . . . .	19
2.2 Cartier divisoren . . . . .	20
2.3 Inverteerbare schoven . . . . .	21
2.4 Divisoren op krommen . . . . .	22
Weil divisoren . . . . .	22
Divisoren op krommen . . . . .	24
2.5 Lineaire systemen . . . . .	24
2.6 De eindigheids-stelling . . . . .	25
De twistende schoof $\mathcal{O}(1)$ . . . . .	26
De cohomologie van de projectieve ruimte . . . . .	26
De eindigheid-stelling van Serre . . . . .	27
2.7 Gevolgen van de eindigheidstelling . . . . .	29
De Euler-Poincaré karakteristiek . . . . .	29
<b>3 Riemann-Roch</b>	<b>31</b>
3.1 De normalisatie van schema's . . . . .	31
3.2 De normalisatie van een kromme . . . . .	33
3.3 De stelling van Riemann-Roch . . . . .	34
De zwakke vorm van de stelling van Riemann-Roch op een niet singuliere complete kromme . . . . .	36
De stelling van Riemann-Roch op een singuliere complete kromme . . . . .	36
3.4 Serre dualiteit . . . . .	37
Reguliere vormen en de canonische divisor . . . . .	38
De dualiteits-stelling . . . . .	38
3.5 De stelling van Riemann-Roch voor niet singuliere krommen . . . . .	52
<b>Bibliografie</b>	<b>53</b>

---

## SCHEMA'S

Bekijken we algebraïsche variëteiten dan is er wegens *Hilberts Nullstellensatz* een 1–1 verband tussen de punten van de variëteit enerzijds en de maximale idealen in de geassocieerde coördinatenring anderzijds. Door ons niet te beperken tot de maximale idealen, vormen we met de priemidealen van de coördinatenring een meetkundige object, het *Spectrum* genaamd, dat dus niet alleen de punten van de variëteit bevat, maar tevens al zijn irreduciebele gesloten deelvariëteiten, corresponderend met de priemidealen. Een tweede veralgemening bestaat er dan uit, de coördinatenring willekeurig te kiezen. Samengevat hechten we zo aan elke ring een meetkundig object dat het onderwerp vormt van het eerste hoofdstuk.

### 1.1 Spectra van ringen

We beschouwen steeds een commutatieve ring  $A$  met eenheid.

**Definitie 1.1.1** Het *spectrum* van een ring  $A$ , genoteerd  $\text{Spec } A$ , is de verzameling van alle priemidealen van  $A$ .

Om van  $\text{Spec } A$  een meetkundig object te maken, voeren we een topologie in, de *Zariski-topologie* genaamd. Dit gebeurt als volgt: zij  $\mathfrak{a}$  een ideaal van  $A$ , dan stellen we  $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$ . Deze verzamelingen nemen we als gesloten verzamelingen voor de topologie. Een open deel van  $\text{Spec } A$  is dan van de vorm:

$$D(\mathfrak{a}) = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Merk op dat de  $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$  een open basis vormen voor de topologie.

Een topologische ruimte  $X$  noemen we *irreduciebel* als ze niet geschreven kan worden als eindige unie van gesloten echte delen van  $X$ . We noemen  $X$  *Noethers* als elke dalende keten  $F_1 \supseteq F_2 \cdots$  van gesloten delen stabiliseert. We noemen dit ook nog de *descending chain condition* (d.c.c). Als in een topologische ruimte  $X$ ,  $X = \overline{\{x\}}$  voor een zekere  $x \in X$ , dan noemen we  $x$  een *generiek punt* van  $X$ . Als  $x$  een gesloten deel is van  $X$ , of dus  $x = \overline{\{x\}}$  dan noemen we dit punt  $x$  een *gesloten punt* van  $X$ . We noemen  $X$  een *compacte* ruimte als elke open bedekking van  $X$  een eindige deelbedekking heeft. Tenslotte,  $X$  is een  $T_0$ -ruimte als voor elk paar verschillende punten  $(x, y)$ , ofwel  $x$  een open omgeving heeft die  $y$  niet omvat, ofwel andersom.

**Stelling 1** *Spec  $A$  is een compacte ruimte.*

**Bewijs.** Stel dat  $\{D(f_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  een open bedekking is van  $\text{Spec } A$ . Noem  $\mathfrak{a}$  het ideaal voortgebracht door  $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ , we hebben dan dat  $\text{Spec } A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D(f_\lambda) = D(\mathfrak{a})$ . Hieruit volgt dat  $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$ . Het ideaal  $\mathfrak{a}$  is dan gelijk aan  $\text{Spec } A$  en dus  $1 \in \mathfrak{a}$ . Zij  $1 = \sum_{i=1}^s g_i f_{\lambda_i}$  voor zekere  $g_i \in A$ .  $X = D(f_{\lambda_1}) \cup \dots \cup D(f_{\lambda_s})$ . En omdat  $\{D(f) \mid f \in A\}$  een open basis vormen, is het gestelde bewezen. ■

**Stelling 2** *Spec  $A$  is een  $T_0$ -ruimte.*

**Bewijs.** Zij  $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$  een willekeurig paar verschillende punten. Beschouwd als deelverzamelingen van  $A$  is ofwel  $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q} \neq \emptyset$ , ofwel  $\mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p} \neq \emptyset$ . Als  $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q} \neq \emptyset$ , dan is voor elke  $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$ ,  $\mathfrak{p} \notin D(f)$  en  $\mathfrak{q} \in D(f)$ . Het andere geval verloopt analoog. ■

Zij  $X$  nog steeds  $\text{Spec } A$ . Voor een  $\mathfrak{p} \in X$ , is  $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$  de intersectie van alle  $V(f)$  die  $\mathfrak{p}$  bevatten. Als  $V(\mathfrak{p})$  irreduciebel is dan is  $\mathfrak{p}$  priem. Zo is  $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\sum_{f \in \mathfrak{p}} fA) = v(\mathfrak{p})$ . We zien dat  $\mathfrak{p}$  een gesloten punt is als en slechts als  $\mathfrak{p}$  een maximaal ideaal is. De volgende stelling geeft antwoord op de vraag wanneer een punt generiek is. Herinner dat het *radikaal* van een ideaal  $\mathfrak{a}$  gedefinieerd is als  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A \mid a^m \in \mathfrak{a} \text{ voor een zekere } m > 0\}$ . Het radikaal  $\sqrt{(0_A)}$  wordt het *nilradikaal* genoemd en bevat alle *nilpotente* elementen van  $A$ . Merk ook op dat  $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

**Stelling 3**  *$V(\mathfrak{a})$  is irreduciebel (t.o.v. de geïnduceerde topologie van  $\text{Spec } A$ ) als en slechts als  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  een priemideaal is. In dit geval is  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  het generieke punt van  $V(\mathfrak{a})$ .*

**Bewijs.** We veronderstellen dat  $\mathfrak{a}$  een echt ideaal is. Vervangen we  $A$  door  $A/\mathfrak{a}$ , dan kunnen we  $\mathfrak{a} = (0_A)$  stellen. Voor elke  $f, g \in A$  met  $fg \in \sqrt{(0_A)}$  hebben we dat  $X = V(fg) = V(f) \cup V(g)$ . Als  $X$  irreduciebel is, dan  $X = V(f)$  of  $X = V(g)$ . Stel  $X = V(f)$ , dan zal wegens  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ ,  $f \in \sqrt{(0_A)}$ . In het andere geval zal  $g \in \sqrt{(0_A)}$ . Dit wil zeggen dat  $\sqrt{(0_A)}$  priem is. Het omgekeerde is triviaal. ■

Tenslotte willen we iets zeggen over de dimensie van  $\text{Spec } A$ .

**Definitie 1.1.2** Zij  $X$  een niet ledige topologische ruimte. De *dimensie* van  $X$ ,  $\dim X$ , is het supremum van alle niet negatieve gehele getallen  $l$  voor welke er gesloten irreduciebele delen  $F_0, \dots, F_l$  van  $X$  bestaan zodat

$$\emptyset \neq F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_l \subseteq X.$$

**Definitie 1.1.3** Zij  $A$  een ring. De (Krull) *dimensie* van  $A$  is het supremum van alle niet negatieve gehelen  $l$  waarvoor er priemidealen  $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_l$  van  $A$  bestaan zodanig dat

$$\mathfrak{p}_l \subset \mathfrak{p}_{l-1} \subset \dots \subset \mathfrak{p}_0 \subset A.$$

**Lemma 1**  $\dim A = \dim \operatorname{Spec} A$ .

**Bewijs.** Zij  $\dim A = l$ , dan geldt voor de priemidealen uit de definitie dat

$$\emptyset \neq V(\mathfrak{p}_0) \subset V(\mathfrak{p}_1) \subset \cdots \subset V(\mathfrak{p}_l) \subseteq \operatorname{Spec} A.$$

Omgekeerd, als  $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l \subseteq \operatorname{Spec} A$  een rij is van gesloten irreduciebele delen, dan is  $F_j = V(\mathfrak{p}_j)$  voor zekere priemidealen  $\mathfrak{p}_j$ . Deze priemidealen voldoen dan aan de inclusierelaties van definitie 1.13. Het bestaan van dergelijke ketens van een bepaalde 'lengte' wordt dus overgedragen van  $A$  naar  $\operatorname{Spec} A$ , en omgekeerd. ■

## 1.2 Schoven

De topologische ruimte  $\operatorname{Spec} A$  is slechts één van de twee bouwstenen van de definitie van een *schema*. De tweede is het begrip schoof. Hiermee hechten we aan elk open deel van een topologische ruimte een bepaalde verzameling, en beschrijven het gedrag in het overlappingsgebied van de open delen. Zij bijvoorbeeld  $V$  een  $C^\infty$  variëteit in  $\mathbb{R}^n$ . Voor elk open deel  $U$  van  $V$  hebben we de ring  $\mathcal{F}(U)$  van functies, continu in  $U$ . Door het variëren van  $U$  bekomen we een schoof  $\mathcal{F}$  op  $V$ .

### Preschoven

**Definitie 1.2.1** Zij  $X$  een topologische ruimte. Stel dat met elk open deel  $U \subset X$  een verzameling  $\mathcal{F}(U)$  en met elke open delen  $U \subset V$  een afbeelding

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

correspondeert. We noemen dit een *preschoof* als aan de volgende eigenschappen voldaan is:

- (1) als  $U = \emptyset$  dan bestaat  $\mathcal{F}(U)$  uit 1 element
- (2)  $\rho_U^U$  is de identieke afbeelding voor elke open  $U$
- (3) voor alle open delen  $U \subset V \subset W$ , hebben we

$$\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W.$$

We noteren in het vervolg een schoof simpelweg met  $\mathcal{F}$ .

Onze interesse gaat nu vooral uit naar het geval  $X = \operatorname{Spec} A$ . We zullen de zogenaamde *structuur preschoof* definiëren op  $\operatorname{Spec} A$ . We beginnen met enkele voorbereidingen.

## Breukenringen -en modulen

Zij  $M$  een  $A$ -moduul en  $S$  een multiplicatief gesloten deelverzameling van  $A$ . Op de verzameling  $M \times S$  definiëren we een relatie  $\sim$  als volgt:  $(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2)$  als er een  $s \in S$  bestaat zodanig dat  $s(s_2m_1 - s_1m_2) = 0$ . Dat dit een equivalentierelatie is, is triviaal. Zij  $S^{-1}M = M \times S / \sim$  en noteer met  $m/s$  de equivalentieklasse van  $(m, s)$ . We maken nu van  $S^{-1}M$  een  $A$ -moduul door een optelling en een actie van  $A$  op  $S^{-1}M$  te definiëren als volgt:

$$\begin{aligned} m_1/s_1 + m_2/s_2 &= (s_2m_1 + s_1m_2)/s_1s_2, \\ (a)(m/s) &= am/s. \end{aligned}$$

Men kan eenvoudig nagaan dat deze bewerkingen goed gedefinieerd zijn en dat  $S^{-1}M$  een abelse groep is, met nulelement  $0 = 0/s$ , die een moduul is over  $A$ . We noemen het  $A$ -moduul  $S^{-1}M$  het *breukenmoduul* bekomen uit  $M$  en  $S$ . In het geval  $M = A$  kan het breukenmoduul  $S^{-1}A$  door de vermenigvuldiging

$$(r/s) \cdot (r'/s') = (rr')/(ss')$$

met  $r, r' \in A$  en  $s, s' \in S$  een *breukenring* worden. Het is duidelijk dat  $S^{-1}M$  beschouwd kan worden als  $S^{-1}A$ -moduul.

We definiëren het *canonisch homomorfisme*,  $\psi_{A,S}$  als  $\psi_{A,S} : A \rightarrow S^{-1}A$  met  $\psi_{A,S}(a) = a/1$ .

Voor een willekeurig ringhomomorfisme  $\varphi : A \rightarrow B$  met de eigenschap dat elk element  $\varphi(s)$  met  $s \in S$  inverteerbaar is, definiëren we  $\Phi : S \times A \rightarrow B$  als  $\Phi(s, a) = \varphi(a)/\varphi(s)$ . Deze definitie is duidelijk onafhankelijk van de gekozen representant. De afbeelding  $\Phi$  induceert dus een ringhomomorfisme  $\varphi^* : S^{-1}A \rightarrow B$  zodat  $\Phi(s, a) = \varphi^*(a/s)$ . Deze  $\varphi^*$  is uniek bepaald door  $\varphi$  en

$$\varphi = \varphi^* \circ \psi_{A,S}.$$

Dit noemt men ook de *universele eigenschap* van het koppel  $(S^{-1}A, \psi_{A,S})$ . Op gelijkaardige wijze definiëren we het  $A$ -homomorfisme  $\psi_{M,S} : M \rightarrow S^{-1}M$  door  $\psi_{M,S}(m) = m/1$ . Ook hier geldt de universele eigenschap. Gegeven een  $S^{-1}A$ -moduul  $N$  en een  $A$ -homomorfisme  $\varphi : M \rightarrow N$ , dan bestaat er een uniek  $S^{-1}A$ -homomorfisme  $\varphi^* : S^{-1}M \rightarrow N$  zodanig dat

$$\varphi = \varphi^* \circ \psi_{M,S}$$

waarbij  $\varphi^*(m/s) = \varphi(m)/s$  voor elke  $m \in M$  en  $s \in S$ .

**Lemma 2**  $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$  zowel als  $A$  en als  $S^{-1}A$  modulen bekeken.

**Bewijs.** Wegens de universele eigenschap bestaat er voor het homomorfisme

$$\varphi_1 : M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M,$$

gedefinieerd als  $\varphi_1(m) = 1 \otimes m$  een  $S^{-1}A$ -homomorfisme

$$\varphi_1^* : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}A \otimes_A M$$

dat voldoet aan  $\varphi_1^*(m/s) = (1/s) \otimes m$ . Wegens de universele eigenschap van het tensorprodukt toegepast op

$$\varphi_2 : S^{-1}A \times M \rightarrow S^{-1}M$$

gedefinieerd door  $\varphi_2(a, m) = am$ , bestaat er een  $A$ -homomorfisme

$$\varphi_2^* : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$$

gedefinieerd door  $\varphi_2^*((a/s) \times m) = am/s$  voor elke  $a/s \in S^{-1}A$  en  $m \in M$ . Omdat  $\varphi_1^* \circ \varphi_2^* = \text{id}$  en  $\varphi_2^* \circ \varphi_1^* = \text{id}$ , zijn deze afbeeldingen  $A$ -isomorfismen tussen  $S^{-1}A \otimes_A M$  en  $S^{-1}M$ .  $\varphi_1^*$  en  $\varphi_2^*$  zijn ook  $S^{-1}A$ -homomorfismen waardoor de twee modulen ook als  $S^{-1}A$ -moduul isomorf zijn. ■

We merken nog op dat indien  $S$  de verzameling is van niet-nuldelers van  $A$ , de ring  $S^{-1}A$ , *totale breukenring* genoemd wordt. Als bovendien  $A$  een integraaldomein is dan spreekt men van het *breukenveld*, genoteerd  $Q(A)$ .

**Lemma 3** *De geassocieerde afbeelding  ${}^a\psi_{A,S} : \text{Spec } S^{-1}A \rightarrow \text{Spec } A$ , gedefinieerd als  ${}^a\psi_{A,S}(\mathfrak{p}) = \psi_{A,S}^{-1}(\mathfrak{p})$ , is een homeomorfisme op de deelruimte  $\Sigma_S = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ .*

**Bewijs.** We bewijzen dat als  $\mathfrak{p} \in \Sigma_S$ ,  $\mathfrak{p}S^{-1}A$  een priemideaal is. Stel  $B = S^{-1}A$  dan is  $\mathfrak{p}B = \{p/s \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S\}$ . Als  $a_1/s_1 \cdot a_2/s_2 \in \mathfrak{p}B$ , dan is  $tsa_1a_2 = tps_1s_2$  voor een zekere  $t \in S$ . Nu is  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  en dus moet  $a_1a_2 \in \mathfrak{p}$ . Nu is  $\mathfrak{p}$  priem, dus moet ofwel  $a_1$  ofwel  $a_2$  in  $\mathfrak{p}$  zitten. Stel dat  $a_1 \in \mathfrak{p}$  dan is  $a_1/s_1 \in \mathfrak{p}B$ . Neem een  $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ . Als  $\mathfrak{p}B = B$  dan is  $a/s_1 = p/s_2$  voor een zekere  $p \in \mathfrak{p}$  en  $s_2 \in S$ . Hieruit volgt dat  $ts_1p = ts_2a$  voor een zeker  $t \in S$  en omdat  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  en  $\mathfrak{p}$  priem is, moet  $a \in \mathfrak{p}$ . Definieer nu  $h : \Sigma_S \rightarrow \text{Spec } B$  door  $h(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}B$ . Voorts is  $\mathfrak{p} \subseteq \psi_{A,S}^{-1}(\mathfrak{p}B)$  en als  $\psi_{A,S}(a) = a/1 = p/s$  voor een  $p \in \mathfrak{p}$  dan is er een  $t \in S$  zodanig dat  $tsa = tp \in \mathfrak{p}$  en  $a \in \mathfrak{p}$ . We hebben dan dat  $\psi_{A,S}^{-1}(\mathfrak{p}B) = \mathfrak{p}$  of

$${}^a\psi_{A,S}^{-1} \circ h = \text{id}.$$

Op analoge manier bewijst men dat

$$h \circ {}^a\psi_{A,S} = \text{id}.$$

We moeten nog bewijzen dat  $\psi_{A,S}$  en  $h$  continu zijn.  $\psi_{A,S}$  is continu omdat  $\forall a \in A$  geldt dat  $\psi_{A,S}^{-1}(D(a)) = D(\psi_{A,S}(a))$ .  $h$  is continu omdat

$$h^{-1}(D(a/s)) = {}^a\psi_{A,S}(D(a/s)) = D(a) \cap \Sigma_S$$

voor elke  $a$  en  $s$ .  ${}^a\psi_{A,S} : \text{Spec } S^{-1}A \rightarrow \Sigma_S$  is dus een homeomorfisme. ■

Voor  $f \in A$  en  $S_f = \{f^n \mid n = 0, 1, \dots\}$  stellen we  $S_f^{-1}A = A_f$ . Het voorgaande lemma zegt dat  $\text{Spec } A_f$  homeomorf is met  $D(f)$ . Nemen we voor  $S = A \setminus \mathfrak{p}$  dan noemen we  $A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A$  de *localisatie* van  $A$  in  $\mathfrak{p}$ . Merk op dat uit het vorige lemma volgt dat  $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \approx \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$ . De ring  $A_{\mathfrak{p}}$  heeft  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  als uniek maximaal ideaal en is dus een *locale* ring.

## De structuur preschoof

We beginnen nu met het definiëren van een preschoof die in het vervolg een belangrijke rol zal spelen. We noteren deze schoof met  $\mathcal{O}$ . De verzamelingen  $D(f)$  voor een  $f \in A$  vormen een basis voor de Zariski-topologie. In het voorgaande hebben we bewezen dat deze  $D(f)$  homeomorf zijn met  $\text{Spec } A_f$ . Het lijkt dan ook natuurlijk te stellen dat

$$\mathcal{O}(D(f)) = A_f.$$

Wanneer is nu  $D(f) \subset D(g)$ ? Dit is equivalent met de vraag: wanneer is  $V(f) \supset V(g)$ ? Of nog, wanneer bevat elk priemideaal dat  $g$  bevat, ook  $f$ ? Als dit zo is, dan zit het beeld  $\bar{f}$  van  $f$  in de quotiënring  $A/(g)$  in elk priemideaal van deze ring, of  $\bar{f}$  zit in het nilradikaal en is dus nilpotent in  $A/(g)$ .  $f^n \in (g)$  voor een zekere  $n > 0$ . We besluiten dat  $D(f) \subset D(g)$  als

$$f^n = gu$$

voor een zekere  $n > 0$  en een  $u \in A$ . We zijn nu in staat de homomorfismen  $\rho_{D(f)}^{D(g)}$  te construeren:

$$\rho_{D(f)}^{D(g)} : A_g \longrightarrow A_f$$

door

$$\rho_{D(f)}^{D(g)}(a/g^k) = au^k/f^{nk}.$$

Deze definitie hangt niet af van de gekozen representant. Zij namelijk  $b/g^l$  een andere representant, i.e.  $\exists m > 0: g^m g^l a = g^m g^k b$ . Dan is

$$\begin{aligned} f^{nm} f^{nl} au^k &= f^{nm} g^l ay^{k+l} \\ &= g^m g^l au^{m+k+l} \\ &= g^m g^k bu^{m+k+l} \\ &= f^{nm} f^{nk} bu^l. \end{aligned}$$

Merk nog op dat het bestaan van deze afbeelding ook volgt uit de universele eigenschap van  $A_g$ .  $g$  en machten van  $g$  zijn namelijk inverteerbaar in  $A_f$  omdat  $f^n = gu$  en dus  $g(u/f^n) = 1$ . Willen we nu met een willekeurig open deel  $U$  een ring associëren dan volstaat het niet  $\mathcal{O}(U) = \bigcap_{\{U \supset D(f)\}} \mathcal{O}(D(f))$  te nemen. Dit heeft geen zin omdat de  $\mathcal{O}(D(f))$  niet in dezelfde verzameling zitten. We hebben een generalisatie nodig van het begrip doorsnede en dit wordt gegeven door de *projectieve limiet*.

**Definitie 1.2.2** Zij  $I$  een partieel geordende verzameling,  $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$  een systeem van verzamelingen geïndexeerd door  $I$ . Voor elke  $\alpha, \beta \in I$  met  $\alpha < \beta$  zij  $f_\alpha^\beta : E_\beta \rightarrow E_\alpha$  afbeeldingen die voldoen aan (1)  $f_\alpha^\alpha$  is de identieke afbeelding op  $E_\alpha$  en (2) als  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  dan hebben we  $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\alpha$ . Beschouw nu de deelverzameling van het produkt  $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$  bestaande uit de verzamelingen  $E_\alpha$  met als elementen  $x = \{x_\alpha \mid x_\alpha \in E_\alpha\}$  zodat  $x_\alpha = f_\alpha^\beta(x_\beta)$  voor elke  $\alpha, \beta \in I$  met  $\alpha \leq \beta$ . Deze deelverzameling noemen we de *projectieve limiet* van de verzamelingen  $E_\alpha$  ten opzichte van de afbeeldingen  $f_\alpha^\beta$ . We noteren deze limiet als  $\varprojlim E_\alpha$ .

Met behulp van deze definitie kunnen we  $\mathcal{O}(U)$  vastleggen:

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim \mathcal{O}(D(f)),$$

waarbij de projectieve limiet genomen is over alle  $D(f) \subset U$  en ten opzichte van de homomorfismen  $\rho_{D(f)}^{D(g)}$  als  $D(g) \subset D(f)$ .  $\mathcal{O}(U)$  bestaat uit families  $\{u_\alpha\}$  met  $u_\alpha \in A_{f_\alpha}$  met  $f_\alpha$  elementen zodanig dat  $D(f_\alpha) \subset U$  en de  $u_\alpha$  gerelateerd zijn met elkaar door

$$u_\alpha = \rho_{D(f_\alpha)}^{D(f_\beta)}(u_\beta)$$

als  $D(f_\alpha) \subset D(f_\beta)$ . Voor willekeurige open delen  $U \subset V$ , definieert elke familie  $\{v_\alpha\} \in \mathcal{O}(V)$  bestaande uit  $v_\alpha \in A_{f_\alpha}$  met  $D(f_\alpha) \subset V$  een deelfamilie  $\{v_\beta\}$ , bestaande uit die  $v_\beta$  waarvoor  $D(f_\beta) \subset U$ . We definiëren dan ook

$$\rho_U^V(\{v_\alpha\}) = \{v_\beta\}.$$

We verkrijgen uiteindelijk de *structuur preschoof*  $\mathcal{O}$  van  $\text{Spec } A$ . Als  $U = \text{Spec } A$  dan is  $D(1) = U$  en we stellen dat  $f_0 = 1$ . We hebben zo een isomorfisme  $\mathcal{O}(\text{Spec } A) \xrightarrow{\sim} A$  gedefinieerd door

$$\{u_\alpha\} \mapsto u_0.$$

## Schoven

**Definitie 1.2.3** Een preschoof  $\mathcal{F}$  op een topologische ruimte  $X$ , niet noodzakelijk  $\text{Spec } A$ , is een *schoof* als voor elk open deel  $U \subset X$  en elke open bedekking  $U = \bigcup U_\alpha$  van  $U$  aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- (4) als  $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$  en  $\rho_{U_\alpha}^U(s_1) = \rho_{U_\alpha}^U(s_2)$  voor alle  $U_\alpha$ , dan  $s_1 = s_2$ ;
- (5) als  $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$  en  $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta)$  voor all  $U_\alpha$  en  $U_\beta$ , dan bestaat er een  $s \in \mathcal{F}(U)$  zodanig dat  $s_\alpha = \rho_{U_\alpha}^U(s)$  voor elke  $U_\alpha$ .

De elementen van  $\mathcal{F}(U)$  worden soms ook *secties* genoemd van  $\mathcal{F}$  over  $U$ . Voorts wordt voor  $\mathcal{F}(U)$  ook nog de notatie  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  gebruikt.

**Stelling 4** *De structuur preschoof  $\mathcal{O}$  op  $\text{Spec } A$  is een schoof. We noteren deze schoof met  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  of  $\mathcal{O}_A$ .*

**Bewijs.** We bewijzen (4) en (5) eerst voor de basiselementen  $D(f)$ . Als  $D(f) = \bigcup D(f_\alpha)$  dan kunnen we evengoed  $f = 1$  stellen.

(1)  $\mathcal{O}$  is een preschoof van ringen zodat het volstaat te bewijzen dat als  $u \in \mathcal{O}(\text{Spec } A) = A$  en  $\rho_{U_\alpha}^{\text{Spec } A}(u) = 0$  voor alle  $U_\alpha = D(f_\alpha)$ , dat dan  $u = 0$ . Wel,  $\rho_{U_\alpha}^{\text{Spec } A}(u) = 0$  betekent dat

$$f_\alpha^{n_\alpha} u = 0$$

voor alle  $\alpha$  en zekere  $n_\alpha \geq 0$ . Omdat  $D(f_\alpha) = D(f_\alpha^{n_\alpha})$  hebben we dat  $\bigcup D(f_\alpha^{n_\alpha}) = \text{Spec } A$  en dus voor zekere  $g_1, \dots, g_r \in A$  is

$$f_{\alpha_1}^{n_1} g_1 + \dots + f_{\alpha_r}^{n_r} g_r = 1.$$

Vermenigvuldigen we dit met  $u$ , dan volgt  $u = 0$ .

(2) Uit stelling 1 volgt dat we ons kunnen beperken tot een eindige bedekking. Stel  $\text{Spec } A = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_2)$  en  $u_i \in A_{f_i}$  met  $u_i = v_i/f_i^{n_i}$ . We kunnen het met een bepaalde  $n$  stellen wegens het eindig karakter van onze bedekking. Nu is  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$  en

$$\rho_{D(f_i f_j)}^{f_i} (u_i) = \frac{v_i f_j^n}{(f_i f_j)^n},$$

en bij veronderstelling is

$$(f_i f_j)^m (v_i f_j^n - v_j f_i^n) = 0.$$

Stellen we  $v_j f_j^m = w_j$  en  $m + n = l$  dan zal  $u_i = \frac{w_i}{f_i^l}$  en  $w_i f_j^l = w_j f_i^l$ . Zoals hierboven in (1) zal

$$\sum f_i^l g_i = 1.$$

Stellen we verder  $u = \sum w_j g_j$  dan is

$$f_i^l u = \sum_j w_j g_j f_i^l = \sum_j w_i g_j f_j^l = w_i.$$

Uiteindelijk hebben we  $\rho_{D(f_i)}^{\text{Spec } A}(u) = w_i/f_i^l = u_i$ .

Voor willekeurige  $U \subset \text{Spec } A$  met  $U = \bigcup_\xi U_\xi$  en  $U_\xi = \bigcup_\eta V_{\xi, \eta}$  en  $V_{\xi, \eta}$  een basiselement van de vorm  $D(f)$  bewijzen we (1) als volgt: als  $\rho_{U_\xi}^U(u) = 0$  voor alle  $U_\xi$  dan is  $\rho_{V_{\xi, \eta}}^U(u) = \rho_{V_{\xi, \eta}}^{U_\xi} \circ \rho_{U_\xi}^U = 0$ . Stellen we  $(\xi, \eta) = \gamma$  dan is  $U = \bigcup V_\gamma$  en  $\rho_{V_\gamma}^U(u) = 0$  voor alle  $\gamma$ . Wegens onze constructie moeten we aantonen dat  $u = 0$  of  $\rho_{V_\alpha}^U(u) = 0$  voor alle  $V_\alpha \subset U$ . Beschouwen we hiervoor het diagram

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha \cap V_\gamma & \subset & V_\gamma \\ \cap & & \cap \\ V_\alpha & \subset & U \end{array}$$

Hieruit volgt dat

$$\rho_{V_\alpha \cap V_\gamma}^U(u) = (\rho_{V_\alpha \cap V_\gamma}^{V_\gamma} \circ \rho_{V_\gamma}^U(u)) = 0$$

voor alle  $V_\gamma$  en omdat  $V_\alpha = \bigcup (V_\alpha \cap V_\gamma)$  en we (1) hebben bewezen voor basiselementen is  $\rho_{V_\alpha}^U(u) = 0$ .

Bewijzen we nu (2) voor willekeurige  $U$ . Zij  $u_\xi \in \mathcal{O}(U_\xi)$  zodanig dat

$$\rho_{U_{\xi_1} \cap U_{\xi_2}}^{U_{\xi_1}}(u_{\xi_1}) = \rho_{U_{\xi_1} \cap U_{\xi_2}}^{U_{\xi_2}}(u_{\xi_2})$$

voor alle  $\xi_1, \xi_2$ . Stellen we verder  $v_{\xi\eta} = \rho_{V_{\xi, \eta}}^{U_\xi}(u_\xi)$  en kiezen we opnieuw andere indices  $\gamma = (\xi, \eta)$  dan bewijzen we dat

$$\rho_{V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}}^{V_{\gamma_1}}(v_{\gamma_1}) = \rho_{V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}}^{V_{\gamma_2}}(v_{\gamma_2}).$$

Dit volgt dadelijk uit

$$\begin{array}{ccc} U_{\xi_1} & \supset & U_{\xi_1} \cap U_{\xi_2} \subset U_{\xi_2} \\ \cup & & \cup \quad \cup \\ V_{\gamma_1} & \supset & V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2} \subset V_{\gamma_2} \end{array}$$

door het beschouwen van de restrictie afbeeldingen  $\rho$  corresponderend met bovenstaande open delen.

Voor een basiselement  $V_\alpha$  met  $V_\alpha \subset U$  is voldaan aan

$$\rho_{V_\alpha \cap V_\gamma}^{V_\gamma}(v_\gamma) = \rho_{V_\alpha \cap V_\gamma}^{V_\alpha}(v_\alpha)$$

en bestaat er dus een element  $v_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$  zodanig dat  $\rho_{V_\alpha \cap V_\gamma}^{V_\alpha}(v_\alpha) = \rho_{V_\alpha \cap V_\gamma}^{V_\gamma}(v_\gamma)$ . Ook is  $\rho_{V_\alpha}^{V_\beta}(v_\beta) = \rho_{V_\alpha \cap V_\beta}^{V_\beta}(v_\beta) = \rho_{V_\alpha}^{V_\alpha}(v_\alpha) = v_\alpha$  als  $V_\alpha \subset V_\beta$ . Deze elementen bepalen een element  $u \in \varprojlim \mathcal{O}(V_\alpha) = \mathcal{O}(U)$ . Deze  $u$  voldoet aan  $\rho_{V_\alpha}^U(u) = v_\alpha$  en de elementen  $u'_\xi = \rho_{U_\xi}^U(u)$  voldoen aan

$$\rho_{V_\tau}^{U_\xi}(u'_\xi) = \rho_{V_\tau}^{U_\xi}(u_\xi)$$

en dit voor alle basiselementen  $V_\tau$ . We hebben dan dat  $u'_\xi = u_\xi$ . ■

### De staak van een preschoof

Zij  $\mathcal{F}$  een preschoof op een topologische ruimte  $X$ . Stellen we  $\Omega = \{U \subset X \mid U \text{ is open}\}$  en  $\Omega_x = \{U \in \Omega \mid x \in U\}$  dan definiëren we de *staak*  $\mathcal{F}_x$  van  $\mathcal{F}$  in  $x$  als

$$\mathcal{F}_x = \text{inj} \lim_{U \in \Omega_x} \mathcal{F}(U).$$

Hier staat injlim voor de *directe* of *injectieve limiet*. Deze limiet is gedefinieerd als

$$\coprod_{U \in \Omega_x} \mathcal{F}(U) / \sim$$

met  $\sim$  de equivalentierelatie

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{F}(U), \beta \in \mathcal{F}(V)$$

met  $U, V \in \Omega_x$  waarvoor er een  $W \subseteq U \cap V$  in  $\Omega_x$  is waarin  $\rho_W^U(\alpha) = \rho_W^V(\beta)$ . Als  $\alpha \in \mathcal{F}(U)$ , dan noteren we de equivalentieklasse van  $\alpha$  in  $\mathcal{F}_x$  als  $\alpha_x$  en noemen dit de *kiem* van  $\alpha$  in het punt  $x$ .

**Stelling 5** *Als  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , dan is de staak  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  isomorf met de lokale ring  $A_{\mathfrak{p}}$ .*

**Bewijs.** Per definitie van  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  is

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \text{inj} \lim_{D(f) \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}(D(f)) \cong \text{inj} \lim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f.$$

Neem nu  $\alpha \in \text{inj} \lim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f$ , dan is bijvoorbeeld  $a/f^n \in A_f$  een representant van  $\alpha$ . Nu zal  $a/f^n \sim b/g^m$  met  $b/g^m \in A_g$  als en slechts als  $ag^mh = bf^nh$  voor een zekere  $h \in S$ . Stellen we nu

$$\phi : \text{inj} \lim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f \longrightarrow (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$$

door  $\phi(\alpha) = a/f^n$  dan is dit het gewenste isomorfisme. ■

### 1.3 Schema's

**Definitie 1.3.1** Een *geringde ruimte* is een koppel  $(X, \mathcal{O})$  bestaande uit een topologische ruimte  $X$  en een schoof van ringen  $\mathcal{O}$ .

Een *morfisme van geringde ruimten*  $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  is een continue afbeelding  $\varphi : X \rightarrow Y$  en een homomorfisme  $\psi_U : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$  voor elk open deel  $U \in Y$ . We eisen verder dat het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\rho_{\varphi^{-1}(V)}^{\varphi^{-1}(U)}} & \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)) \\ \psi_V \uparrow & & \uparrow \psi_U \\ \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\rho_V^U} & \mathcal{O}_Y(U) \end{array}$$

commuteert voor alle open delen  $U \subset V$  van  $Y$ .

Zijn de staken  $\mathcal{O}_{X,x}$  locale ringen dan noemt men  $(X, \mathcal{O}_X)$  een *locale geringde ruimte*.

**Definitie 1.3.2** Een *schema* is een een locale geringde ruimte  $(X, \mathcal{O})$  zodanig dat elk punt  $x$  van  $X$  een omgeving  $U$  heeft waarvoor de geringde ruimte  $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$  isomorf is met  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_A)$  met  $A$  een zekere ring. Zo'n omgeving noemen we een *affiene omgeving* van  $x$ .

We geven nu enkele eigenschappen van schema's.

**Definitie 1.3.3** Een schema  $X$  heet *samenhangend* als zijn onderliggende topologische ruimte samenhangend is. (De enige open en gesloten delen zijn  $\emptyset$  en de ruimte zelf). Een schema  $X$  heet *irreduciebel* als de onderliggende topologische ruimte het is.

Een belangrijke eigenschap van schema's is de volgende

**Stelling 6** *Zij  $X$  een schema, dan heeft elk irreduciebel gesloten deel  $V$  van  $X$  een uniek generiek punt.*

**Bewijs.** We nemen voor een punt  $x \in V$  een open affiene omgeving  $U$ .  $V \cap U$  is irreduciebel en gesloten in  $U$ . Uit stelling 3 bestaat hiervoor een generiek punt  $\xi$  waarvan de sluiting  $V$  is ( $V \cap U$  is dicht in  $V$ ). Het uniek zijn van  $\xi$  volgt uit stelling 2 en het feit dat  $T_0$ -zijn een locale eigenschap is. ■

**Definitie 1.3.4** Een schema  $X$  heet *gereduceerd* als voor elk open deel  $U$ , de ring  $\mathcal{O}_X(U)$  geen nilpotente elementen bevat.

**Definitie 1.3.5** Een schema  $X$  heet *integraal* als voor elk open deel  $U$  de ring  $\mathcal{O}_X(U)$  een integraal domein is.

Interessant is de volgende

**Stelling 7** *Zij  $X$  een schema, dan is  $X$  integraal als en slechts als  $X$  irreduciebel en gereduceerd is.*

**Bewijs.** Stel dat  $X$  een integraal reducibel schema  $X = X_1 \cup X_2$  is met  $X_i$  gesloten echte delen van  $X$ . Nemen we twee open delen  $U_1 \subseteq X \setminus X_1$  en  $U_2 \subseteq X \setminus X_2$ , dan is  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  en  $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) \cong \mathcal{O}_X(U_1) \oplus \mathcal{O}_X(U_2)$  hetgeen duidelijk geen integraal domein is. Omgekeerd, veronderstellen we dat  $X$  een affien schema is. Stel dat  $X$  irreduciebel en gereduceerd is en dat er bovendien een  $a$  en  $b \in \mathcal{O}_X$  bestaan zodanig dat  $ab = 0$ . Dan is  $X = V(a) \cup V(b)$  en omdat  $X$  irreduciebel is, zal ofwel  $X = V(a)$  ofwel  $X = V(b)$ . Zo is  $a$  of  $b$  een nilpotent element van  $\mathcal{O}_X$  en wegens het gereduceerd zijn van  $X$  zal  $a$  of  $b$  gelijk zijn aan 0. ■

**Definitie 1.3.6** Een schema  $X$  is *locaal noethers* als het bedekt kan worden door open affiene delen  $\text{Spec } A_i$ , met elke  $A_i$  een noetherse ring.  $X$  is *noethers* als het bedekt kan worden door een eindig aantal open affiene delen  $\text{Spec } A_i$  met  $A_i$  noetherse ringen.

**Definitie 1.3.7** Een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  van schema's is een *affien morfisme* als er een open affiene bedekking  $\{V_i\}$  bestaat zodanig dat de  $U_i = f^{-1}(V_i)$  ook affien zijn.

**Definitie 1.3.8** Een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  van schema's is *lokaal van eindig type* als er een bedekking van  $Y$  bestaat, bestaande uit open affiene delen  $V_i = \text{Spec } B_i$  zodanig dat voor elke  $i$ ,  $f^{-1}(V_i)$  bedekt kan worden door open affiene delen  $U_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$  met elke  $A_{ij}$  een eindig voortgebrachte  $B_i$ -algebra. Het morfisme  $f$  is van *eindig type* als daarenboven elke  $f^{-1}(V_i)$  bedekt kan worden door een *eindig* aantal  $U_{ij}$ . We noemen verder een schema  $X$  *algebraïsch* over  $R$  als  $X \rightarrow \text{Spec } R$  van eindig type is.

**Definitie 1.3.9** Een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  van schema's is een *eindig morfisme* als er een bedekking van  $Y$  bestaat, bestaande uit open affiene delen  $V_i = \text{Spec } B_i$ , zodanig dat voor elke  $i$ ,  $f^{-1}(V_i)$  affien is.  $f^{-1}(V_i) = \text{Spec } A_i$  met  $A_i$  een  $B_i$ -algebra die eindig voortgebracht is als  $B_i$ -moduul.

**Definitie 1.3.10** Een *open deelschema* van een schema  $X$  is een schema  $U$ , met een open deel van  $X$  als topologische ruimte en met structuurschoof  $\mathcal{O}_U \cong \mathcal{O}_X|_U$ . Een *open immersie* is een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  dat een isomorfisme induceert van  $X$  naar een open deelschema van  $Y$ . Een *gesloten deelschema* van een schema  $X$  is een schema  $Y$ , bepaald door een  $\mathcal{O}_X$ -ideaal  $\mathcal{I}$ . Hiermee wordt bedoeld dat  $Y = \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$  en de structuurschoof van  $Y$  is  $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}|_Y$ . Er wordt wel verondersteld dat  $\text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = \{x \in X \mid (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x \neq 0\}$  inderdaad een gesloten deel is van  $X$ , en dit is niet steeds het geval. Als  $\mathcal{I}$  een quasi-coherent (zie aan het einde van dit hoofdstuk)  $\mathcal{O}_X$ -ideaal is, dan kan men bewijzen dat dit wel het geval is. Een *gesloten immersie* is een morfisme  $f : Y \rightarrow X$  dat een isomorfisme induceert van  $Y$  naar een gesloten deelschema van  $X$ .

Uit de definitie van Zariski-topologie volgt dat een affien schema nooit Hausdorff is. Willen we de Hausdorff-eigenschap nagaan voor schema's dan kan dit niet met de gewone definitie van een Hausdorff-ruimte. Er is echter een equivalente definitie van Hausdorff-zijn die wel voor schema's gebruikt kan worden. Hiervoor hebben we het produkt van schema's nodig.

## Produkt van schema's

**Definitie 1.3.11** Zij  $S$  een schema. Een  $S$ -schema is een koppel  $(X, \varphi)$ , met  $X$  een schema en  $\varphi : X \rightarrow S$  een morfisme. Een  $S$ -morfisme  $f : (X, \varphi) \rightarrow (Y, \psi)$  van  $S$ -schema's is een morfisme  $f$  van schema's zodat  $\psi \circ f = \varphi$ .

**Definitie 1.3.12** Zij  $X$  en  $Y$   $S$ -schema's. Het  $S$ -produkt van  $X$  en  $Y$  is een drietal  $(Z, p, q)$ , waarbij  $Z$  een  $S$ -schema is en  $p : Z \rightarrow X$ ,  $q : Z \rightarrow Y$   $S$ -morfismen zodanig dat voor elk gegeven  $S$ -schema  $P$  en elk  $S$ -morfisme  $\varphi : P \rightarrow X$  en  $\psi : P \rightarrow Y$ , er een uniek  $S$ -morfisme  $f : P \rightarrow Z$  bestaat met  $p \circ f = \varphi$  en  $q \circ f = \psi$ .

We noteren dit produkt met  $X \times_S Y$ . We verwijzen naar [H] en [I] voor het bewijs van bestaan.

## Gesepareerde schema's

Zoals hoger opgemerkt, bestaat er een definitie voor het Hausdorff-zijn van schema's. Een willekeurige topologische ruimte  $Y$  is Hausdorff als en slechts als de diagonaalafbeelding  $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$  gesloten is in de produkttopologie  $Y \times Y$  (Zie [C]). Het produkt van schema's zoals gedefinieerd in de vorige paragraaf is echter verschillend van de produkttopologie van de topologische ruimten onderliggend aan de schema's. Toch hebben we de volgende

**Definitie 1.3.13** Een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  van schema's is *gesepareerd* als  $\Delta_{X/Y} = (id_X, id_x) : X \rightarrow X \times_Y X$  een gesloten immersie is. We zeggen dan dat het schema  $X$  *gesepareerd* is over  $Y$ , of nog,  $X$  is  *$Y$ -gesepareerd*.  $X$  is *gesepareerd* als het gesepareerd is over  $\mathbb{Z}$ .

Als voorbeeld bewijzen we het volgend

**Lemma 4** *Als in de definitie zowel  $X$  als  $Y$  affiene schema's zijn, dan is elk morfisme gesepareerd.*

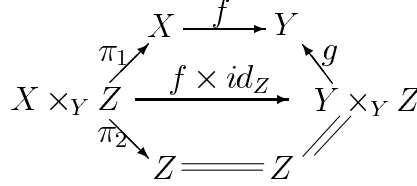
**Bewijs.** Stel dat  $X = \text{Spec } A$  en  $Y = \text{Spec } B$  en zij  $f : X \rightarrow Y$  een morfisme. Het  $Y$ -produkt van  $X$  met zichzelf is dan  $(\text{Spec}(A \otimes_B A), {}^a \pi_1, {}^a \pi_2)$  met  $\pi_1 : A \rightarrow A \otimes_B A$  en  $\pi_2 : A \rightarrow A \otimes_B A$  (zie [I]). Het is duidelijk dat de afbeelding  $\psi : A \otimes_B A \rightarrow A$  gedefinieerd door

$$\psi(a \otimes a') = a \cdot 1$$

surjectief is, zodat  $\Delta_{X/Y}$  een gesloten immersie is. Het voorgaande is onafhankelijk van  $f$ , waaruit het gestelde volgt. ■

**Definitie 1.3.14** Een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  van schema's is *gesloten* als de continue afbeelding op de topologische ruimten gesloten is. Een morfisme  $f : X \rightarrow Y$  is *universeel*

gesloten als  $f_Z : X_Z \rightarrow Z$  gesloten is voor elk morfisme  $g : Z \rightarrow Y$ . Hierin is  $X_Z$  het  $Z$ -schema  $(X \times_Y Z, \pi_2)$  en  $f_Z = f \times id_Z : X \times_Y Z \rightarrow Y \times_Y Z$ . We kunnen wegens het uniek zijn van het  $Y$ -produkt van schema's,  $Y \times_Y Z$  identificeren met  $Z$  en wegens het onderstaand diagram is dan  $f_Z = \pi_2$ .



**Definitie 1.3.15** Een *eigenlijk* morfisme  $f : X \rightarrow Y$  is een morfisme dat gesepareerd, van eindig type en universeel gesloten is.

**Definitie 1.3.16** Een schema  $X$  over een veld  $k$  wordt ( $k$ -)complete genoemd als  $\varphi : X \rightarrow \text{Spec } k$  eigenlijk is.

## 1.4 Gegradueerde ringen en schema's

### Gegradueerde ringen

**Definitie 1.4.1** Een *gegradueerde ring*  $S$  is een ring  $S$  samen met een directe som ontbinding in abelse groepen,  $S \oplus_{d \geq 0} S_d$ , zodanig dat voor elke  $d, e \geq 0$ ,  $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$ . Een element van  $S_d$  noemt men een homogeen element van graad  $d$ . Een homogeen ideaal  $\mathfrak{a} \subset S$  is een ideaal  $\mathfrak{a}$  van  $S$  zodanig dat  $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$ .

Vertrekkend van een gegradueerde ring maken we een schema. De topologische ruimte wordt gegeven door de volgende definitie

**Definitie 1.4.2**  $\text{Proj}(S) = \{ \mathfrak{p} \text{ homogeen ideaal van } S \text{ zodanig dat } \bigoplus_{d > 0} S_d \not\subseteq \mathfrak{p} \}$ .

Hierop wordt de topologie gedefinieerd wordt door de verzamelingen  $V(\mathfrak{a}) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj} S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \}$  als gesloten delen te nemen. Verder maken we van de ring  $S$  weeral op analoge manier een schoof  $\mathcal{O}$  van ringen die ook hier voldoet aan de volgende eigenschappen

- (1)  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$  voor elke  $\mathfrak{p} \in \text{Proj} S$  waarin  $S_{(\mathfrak{p})}$  de verzameling is van alle elementen van graad nul in de localisatie  $T^{-1}S$ , waarbij  $T$  de verzameling is van alle homogene elementen die niet in  $\mathfrak{p}$  zitten.
- (2) Stel  $D_+(f) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p} \}$ , dan is  $D_+(f) \cong \text{Spec } S_{(f)}$ .

Omwille van deze eigenschappen en het feit dat  $\text{Proj} S = \bigcup D_+(f)$  volgt dat  $(\text{Proj} S, \mathcal{O})$  een schema is.

## Projectieve schema's

Zij  $A$  een ring en stel  $S = A[x_0, \dots, x_n]$ . We definiëren de  $n$ -dimensionale projectieve ruimte over  $A$  als  $\mathbb{P}_A^n = \text{Proj} S = \text{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$ . Zij nu  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}$  een ringmorfisme en  ${}^a\varphi : \text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow \text{Spec } A$  de geassocieerde afbeelding, dan volgt dat

$$\mathbb{P}_A^n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } A.$$

Voor een algemeen schema  $Y$  hebben we dan de volgende

**Definitie 1.4.3** De *projectieve ruimte* over  $Y$ ,  $\mathbb{P}_Y^n$ , wordt gedefinieerd als  $\mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} Y$ . Een morfisme van schema's  $f : X \rightarrow Y$  is *projectief* als  $f$  ontbindt in een gesloten immersie  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$  en de projectie  $\pi_2 : \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ .

## 1.5 Abstracte variëteiten

Dat schema's ingevoerd zijn, is mooi op zich, maar het belang ervan zit mede in het feit dat schema's het begrip variëteit omvatten. Een variëteit is geen schema, maar men kan met elke variëteit een schema associëren (zie [H]). Deze schema's voldoen aan enkele karakteristieke eigenschappen. Wanneer een schema nu aan die eigenschappen voldoet, dan bewijst men omgekeerd dat aan het schema een variëteit gehecht kan worden. Dit inspireert ons variëteiten *abstract* te definiëren.

**Definitie 1.5.1** Een (*abstracte*)variëteit is een integraal, gesepareerd schema van eindig type over een algebraïsch gesloten veld.

Wanneer we in het vervolg spreken over variëteiten, hebben we deze definitie in gedachten. Zo is een kromme een abstracte variëteit van dimensie 1.

Deze abstracte variëteiten bestaan op zichzelf. Ze worden dus niet beschouwd in bijvoorbeeld een projectieve ruimte, ten opzichte van een zekere inbedding. In sommige gevallen is het echter mogelijk een dergelijke inbedding te vinden. Onder de abstracte variëteiten zijn het diegene die  $k$ -compleet zijn, waarvoor een verband bestaat met inbedbare (projectieve) variëteiten. Belangrijk in deze discussie is

**Stelling 8 (Chows lemma)** *Zij  $V$  een  $k$ -complete variëteit. Dan bestaat er een projectieve variëteit  $V'$ , een eigenlijk morfisme  $f : V' \rightarrow V$  en een open, dicht deel  $U \subset V$  zodanig dat  $f|_{f^{-1}(U)}$  een isomorfisme is.*

Belangrijk is op te merken dat in geval van krommen deze begrippen samenvallen.

**Stelling 9** *Een kromme is  $k$ -compleet als en slechts als de kromme projectief is.*

Voor beide bewijzen verwijzen we naar [I].

We eindigen met de definitie van een *niet singuliere* variëteit.

**Definitie 1.5.2** Een variëteit  $V$  is *niet singulier* als voor elke  $x \in V$ , de ring  $\mathcal{O}_{V,x}$  een *reguliere locale ring* is.

Voor meer informatie omtrent deze definitie zie [Shaf2]. In het geval van krommen valt dit begrip samen met het *normaal* zijn van de variëteit. Zie [I] voor het bewijs hiervan.

## 1.6 Schoven van modulen

Zoals we in paragraaf 1.2 een schoof van ringen hebben geconstrueerd, willen we nu een schoof van modulen op een schema bekomen. Deze schoof zal aan analoge eigenschappen voldoen als de schoof van ringen. Ook de bewijzen verlopen in de meeste gevallen analoog. Het is vaak niets meer dan de ring  $A$  te vervangen door het moduul  $M$ . We laten de details dan ook achterwege in onze bewijsvoering.

### Schoven van modulen

**Definitie 1.6.1** Zij  $X$  een topologische ruimte en  $\mathcal{O}$  een schoof van ringen op  $X$ . Zij  $\mathcal{F}$  een schoof van abelse groepen zodanig dat voor elke open  $U \subset X$ , de groep  $\mathcal{F}(U)$  de structuur van een  $\mathcal{O}(U)$ -moduul draagt, dan noemen we  $\mathcal{F}$  een schoof van  $\mathcal{O}$ -modulen. Een bijkomende voorwaarde is echter wel dat de vermenigvuldingsafbeelding  $\mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  aan het volgende commutatief schema

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{O}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ \rho_{U,\mathcal{F}}^V \otimes \rho_{U,\mathcal{O}}^V \downarrow & & \downarrow \rho_{U,\mathcal{F}}^V \\ \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

voldoet voor elke  $U \subset V$ .

De staken  $\mathcal{F}_x$  van  $\mathcal{F}$  zullen zo modulen zijn over de staken  $\mathcal{O}_x$  van  $\mathcal{O}$ . Voorts wordt de directe som en het tensorproduct van modulen overgedragen op de schoven van modulen. Een morfisme van  $\mathcal{O}$ -modulen is een morfisme dat voor elke open  $U$  een homomorfisme is van  $\mathcal{O}(U)$ -modulen. Voor een meer expliciete uiteenzetting verwijzen we naar [H] en ook [I]. We beperken ons tot een paar topics die we nog nodig hebben.

### De projectieformule

Voor algemene schoven bestaan er bewerkingen, bepaald door continue afbeeldingen tussen topologische ruimten. Zij  $f : X \rightarrow Y$  een continue afbeelding tussen twee topologische ruimten en zij allereerst  $\mathcal{F}$  een schoof op  $X$ .

**Definitie 1.6.2** De *directe beeld* schoof  $f_*\mathcal{F}$  op  $Y$  is de schoof gedefinieerd door  $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  voor elke open  $V \subseteq Y$ .

Als verder  $\mathcal{G}$  een schoof is op  $Y$  dan hebben we

**Definitie 1.6.3** De *inverse beeld* schoof  $f^{-1}\mathcal{G}$  op  $X$  is de schoof bepaald door de preschoof  $U \rightarrow \lim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{G}(V)$  voor elke open  $U$  van  $X$  en waarbij de limiet genomen wordt over alle open  $V \subseteq Y$  die  $f(U)$  bevatten.

Deze laatste definitie maakt gebruik van het feit dat aan elke preschoof een schoof gehecht kan worden. Voor de constructie van deze schoof zie [I],[H].

Beschouwen we schoven van modulen op geringde ruimten  $(X, \mathcal{O}_X)$ , dan zal voor een morfisme  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  en een schoof van modulen  $\mathcal{F}$  op  $X$ , de directe beeld schoof  $f_*\mathcal{F}$  een  $f_*\mathcal{O}_X$ -moduul zijn. Uit de definitie van morfisme van geringde ruimten volgt dat  $f_*\mathcal{F}$  opgevat kan worden als  $\mathcal{O}_Y$ -moduul. Op gelijkaardige manier kan het  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -moduul  $f^{-1}\mathcal{G}$  opgevat worden als  $\mathcal{O}_X$ -moduul.

**Definitie 1.6.4** We definiëren de *inverse beeld* schoof van een  $\mathcal{O}_Y$ -moduul  $\mathcal{G}$  onder het morfisme  $f$  als het  $\mathcal{O}_X$ -moduul

$$f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

We noteren deze schoof met  $f^*$ .

Een belangrijke stelling in deze context is de

**Stelling 10 (projectiestelling)** *Zij  $f : X \rightarrow Y$  een morfisme van geringde ruimten. Neem  $\mathcal{F}$  een  $\mathcal{O}_X$ -moduul en  $\mathcal{G}$  een  $\mathcal{O}_Y$ -moduul dat lokaal vrij van eindig type is. Dan is*

$$(f_*\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \cong f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G}).$$

*In het bijzonder is  $(f_*\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \cong f_*f^*\mathcal{G}$ .*

**Bewijs.** Het bewijs van deze stelling staat volledig in [I]. In [H] wordt ze als oefening gegeven. ■

### Quasi-coherente schoven

Zij  $M$  een  $A$ -moduul. Voor elke  $f \in A$  definiëren we  $M_f$  als  $M \otimes_A A_f$  (Zie lemma 2). We bekomen door middel van dezelfde argumentatie als in paragraaf 1.2 een schoof  $\mathcal{F}$  zodanig dat  $\mathcal{F}(D(f)) \cong M_f$  voor elke  $f \in A$ .  $M_f$  is een  $A_f$ -moduul zodat  $\mathcal{F}$  een  $\mathcal{O}$ -moduul wordt, waarbij  $\mathcal{O}$  de schoof is, bekomen van de ring  $A$ . We noteren deze schoof  $\mathcal{F}$  met  $\widetilde{M}$ .

**Definitie 1.6.5** Het  $\mathcal{O}$ -moduul  $\widetilde{M}$  wordt het  $\mathcal{O}$ -moduul geassocieerd aan  $M$  genoemd.

Men toont aan dat voor elke  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , de staak  $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -isomorf is met  $M_{\mathfrak{p}}$ . Deze schoven van de vorm  $\widetilde{M}$  zijn de bouwstenen voor quasi-coherente schoven.

---

**Definitie 1.6.6** Zij  $(X, \mathcal{O}_X)$  een schema. Een schoof van  $\mathcal{O}_X$ -modulen  $\mathcal{F}$  is *quasi-coherent* als  $X$  bedekt kan worden door open affiene delen  $U_i = \text{Spec } A_i$  zodanig dat voor elke  $i$ ,  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M}_i$  met  $M_i$  een  $A_i$ -moduul. Als bovendien deze  $M_i$  eindig voortgebracht zijn als  $A_i$ -modulen, dan noemt men  $\mathcal{F}$  een *coherente schoof*.

**Voorbeeld** Met de definitie van hierboven is voor elk schema  $X$ , de structuur-schoof  $\mathcal{O}_X$  coherent.

In verband met de vorige paragraaf is het interessant de vraag te stellen of  $f^*$  en  $f_*$  van (quasi-) coherente schoven opnieuw (quasi-) coherente schoven geven. In het algemeen is dit niet het geval.

---

## DIVISOREN OP SCHEMA'S

In dit hoofdstuk definiëren we divisoren op een algemeen schema en bestuderen het verband met inverteerbare schoven. Om het beeld compleet te maken wordt ook het verband met ‘klassieke’ divisoren gegeven. We eindigen dit hoofdstuk met lineaire systemen van divisoren en geven een bewijs van de eindigheid van deze ruimten.

### 2.1 Reguliere en rationale functies op schema's

In deze paragraaf nemen we voor  $X$  een  $R$ -schema, met  $R$  een ring.

#### Reguliere functies

**Definitie 2.1.1** Een  $R$ -morfisme  $f : X \rightarrow \text{Spec } R[x]$  is een  $(R)$ -reguliere functie op  $X$ .

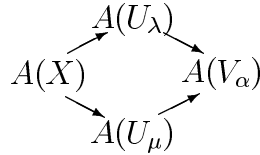
De verzameling van alle  $R$ -morfismen tussen twee  $R$ -schema's  $X$  en  $Y$  noteren we met  $\text{Hom}_R(X, Y)$ . Analoog staat  $\text{Hom}_R(A, B)$  voor de verzameling van  $R$ -algebra homomorfismen tussen de  $R$ -algebra's  $A$  en  $B$ . We willen nu met elke  $R$ -reguliere functie een sectie van de structuurschoof associëren. Hiervoor maken we gebruik van de volgende

**Stelling 11** *Is  $X$  een  $R$ -schema en  $A$  een  $R$ -algebra.*

*Dan is er een bijectie  $\Gamma : \text{Hom}_R(X, \text{Spec } A) \cong \text{Hom}_R(A, \mathcal{O}_X(X))$ .*

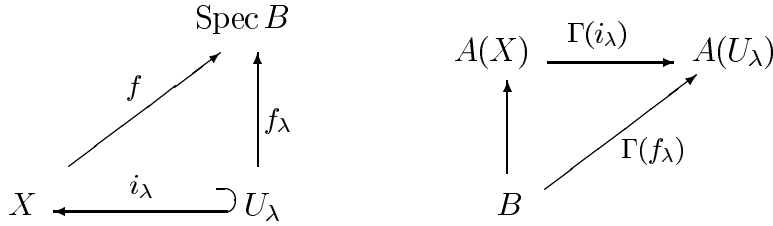
**Bewijs.** We merken eerst op dat als  $X$  een  $R$ -schema is, de ring  $\mathcal{O}_X(X)$  op te vatten is als  $R$ -algebra. Verder, is  $f$  een  $R$ -morfisme  $f : X \rightarrow Y$  van  $R$ -schema's, dan is  $\theta(f) : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  een morfisme van schoven en we stellen  $\Gamma(f) : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$ . Het is duidelijk dat  $\Gamma(f)$  een  $R$ -algebra homomorfisme is. We noteren  $\mathcal{O}_X(X)$  met  $A(X)$ .

Om nu het gestelde te bewijzen construeren we eerst een canonisch  $R$ -morfisme  $\Psi : X \rightarrow \text{Spec}(A(X))$ . Hiervoor bedekken we  $X$  met open affiene delen  $\{U_\lambda\}$ . De inclusieafbeeldingen  $i_\lambda \hookrightarrow U_\lambda$  induceren  $\psi_\lambda = \Gamma(i_\lambda) : A(X) \rightarrow A(U_\lambda)$  en  $\Psi_\lambda = {}^a\psi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \text{Spec } A(X)$  voor elke  $\lambda$ . We willen nu de  $\Psi_\lambda$  samenvoegen tot een  $R$ -morfisme van  $X$  naar  $\text{Spec } A(X)$ . Hiervoor is het voldoende dat  $\Psi_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = \Psi_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ . We bedekken  $U_\lambda \cap U_\mu$  met open affiene delen  $\{V_\alpha\}$  en verkrijgen zo het volgend commutatief diagram

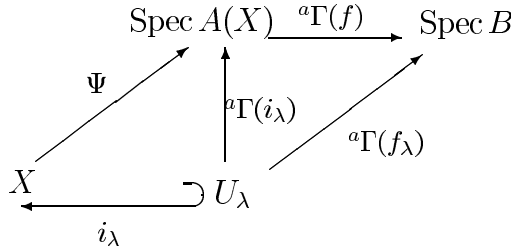


geassocieerd aan de bedekking  $\{V_\alpha\}$ . Nu is  $\Psi_\lambda|_{V_\alpha} = \Psi_\mu|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow \text{Spec } A(X)$ . Zodat uiteindelijk  $\Psi_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = \Psi_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ .

Gegeven een  $R$ -morfisme  $f : X \rightarrow \text{Spec } B$  hebben we de volgende commutatieve diagrammen waarin  $f_\lambda = f|_{U_\lambda}$



en



Hieruit volgt dat  $f_\lambda = f|_{U_\lambda} = {}^a\Gamma(f_\lambda)$  en dat  $({}^a\Gamma(f) \circ \Psi)|_{U_\lambda} = {}^a\Gamma(f_\lambda)$  voor elke  $\lambda$ . Zo is dus  $f = {}^a\Gamma(f) \circ \Psi$ . Als  $B = A(X)$  en  $f = \Psi$  dan volgt dat  $\Gamma(\Psi) = \text{id}$ . We bewijzen nu de injectiviteit van  $\Gamma$ . Stel dat  $f = g \circ \Psi$  met  $g : \text{Spec } A(X) \rightarrow \text{Spec } B$  een  $R$ -morfisme. Dan is  $\Gamma(f) = \Gamma(\Psi) \circ \Gamma(g) = \Gamma(g)$  en  $g = {}^a\Gamma(g) = {}^a\Gamma(f)$ . Voor de surjectiviteit nemen we een  $\varphi \in \text{Hom}_R(B, A(X))$ . Het  $R$ -morfisme  ${}^a\varphi \circ \Psi$  wordt duidelijk op  $\varphi$  afgebeeld door  $\Gamma$ . ■

Een  $R$ -reguliere functie is nu als volgt te zien als sectie van de schoof  $\mathcal{O}_X$ :

$$\text{Hom}_R(X, \text{Spec } R[x]) \cong \text{Hom}_R(R[x], A(X)) \cong A(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

met

$$f \leftrightarrow \Gamma(f) \leftrightarrow \Gamma(f)(x).$$

### Rationale functies

We definiëren de verzameling  $\mathbb{E}$  als

$$\mathbb{E} = \{(U, \varphi) \mid U \text{ is een open dicht deel van } X, \varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)\}$$

en een equivalentierelatie  $\sim$  in  $\mathbb{E}$  door

$$(U\varphi) \sim (V, \psi) \iff \varphi|_W = \psi|_W$$

voor een zeker open dicht deel  $W \subset U \cap V$ . Dat dit inderdaad een equivalentierelatie is steunt op het feit dat de doorsnede van twee open dichte delen opnieuw open en dicht is.

**Definitie 2.1.2** Een *R-rationale functie* op  $X$  is een element van  $\mathbb{E}/\sim$ . De verzameling van *R-rationale functies* op  $X$  noteren we met  $\text{Rat}_R(X)$ .

Op een natuurlijke manier wordt  $\text{Rat}_R(X)$  een *R*-algebra, de *ring van R-rationale functies* van  $X$ . Als direct gevolg van de definitie hebben we het volgende

**Lemma 5** *Zij  $X$  een willekeurig schema, dan geldt*

- a) *als  $U$  een open dicht deel is van  $X$ , dan is  $\text{Rat}_R(X) \cong \text{Rat}_R(U)$ .*
- b)  *$\text{Rat}_R(X) = \text{inj lim}_U \mathcal{O}_X(U)$  met  $U$  open dichte delen van  $X$ .*

In het algemeen weten we niet veel over  $\text{Rat}_R(X)$ . Door eisen aan  $X$  te stellen verhelpen we dit. Stel bijvoorbeeld dat  $X$  irreduciebel is. Dan weten we dat er een uniek generiek punt  $x$  bestaat. Uit b) van het vorige lemma volgt dat  $\text{Rat}_R(X) \cong \mathcal{O}_{X,x}$ . Als daarenboven  $X$  gereduceerd is, dan is  $\mathcal{O}_{X,x}$  een veld omdat  $x$  het generieke punt is.

**Definitie 2.1.3** Als  $X$  een integraal schema is dan is  $\text{Rat}_R(X)$  het *functieveld* van  $X$ . We noteren dit met  $K = K(X)$ . Hechten we aan elke open  $U$  dit functieveld dan bekommen we een constante schoof  $\mathcal{K}$  op  $X$ . Deze schoof wordt soms ook het functieveld van  $X$  genoemd.

## 2.2 Cartier divisoren

Zij  $X$  een willekeurig schema. Voor elk open affien schema  $U = \text{Spec } A$ , beschouwen we de localisatie van  $A$  naar  $S = \{a \in A \mid a \text{ is geen nuldeeler}\}$ . We noteren dit met  $K(U)$  en de ringen  $K(U)$  vormen een schoof van ringen  $\mathcal{K}$ .

**Definitie 2.2.1** De schoof  $\mathcal{K}$  is de *schoof van totale quotiëntringen* van  $\mathcal{O}_X$ .

De schoof  $\mathcal{K}$  vervangt het concept van functieveld op een integraal schema. We noteren de schoof van inverteerbare elementen van  $\mathcal{K}$  met  $\mathcal{K}^*$  en de schoof van inverteerbare elementen van  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$  met  $\mathcal{O}^*$ .

**Definitie 2.2.2** Een *Cartier divisor* op een schema  $X$  is een globale sectie van de schoof  $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ . Een Cartier divisor op  $X$  kan beschreven worden door het geven van een open bedekking  $\{U_i\}$  van  $X$  en voor elke  $i$  een element  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$  waarvoor voor elke  $i, j$ ,  $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$ .

Een Cartier divisor is een *hoofddivisor* als hij in het beeld van de projectieafbeelding  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$  zit. Twee Cartier divisoren zijn *lineair equivalent* als hun verschil een hoofddivisor is. Deze lineaire equivalentie vormt een equivalentierelatie. De Cartier divisoren vormen een groep, de *Cartier groep* genaamd, en we noteren deze met  $\text{Ca}(X)$  en gebruiken de additieve notatie. De Cartier groep modulo de lineaire equivalentierelatie noemt men de *Cartier klasse groep* en wordt genoteerd met  $\text{CaCl}(X)$ .

### 2.3 Inverteerbare schoven

**Definitie 2.3.1** Een *inverteerbare schoof* op een schema  $X$  is een lokaal vrij  $\mathcal{O}_X$ -moduul van rang 1.

**Lemma 6** *Als  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{M}$  inverteerbare schoven zijn op  $X$ , dan is ook  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  inverteerbaar. Als  $\mathcal{L}$  inverteerbaar is op  $X$ , dan is  $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$  inverteerbaar en  $\mathcal{L} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{O}) \cong \mathcal{L}$ .*

Onder de tensorvermenigvuldiging vormen de isomorfieklassen van inverteerbare schoven een groep, de *Picard groep* genaamd. We noteren deze groep met  $\text{Pic}(X)$ . We geven het verband tussen Cartier divisoren en inverteerbare schoven in de volgende

**Stelling 12** *Zij  $X$  een schema, dan*

- (1) *bestaat er voor elke Cartier divisor  $D$  een inverteerbare schoof  $\mathcal{O}(D)$  van  $X$  en de afbeelding  $D \rightarrow \mathcal{O}(D)$  is 1-1.*
- (2)  $\mathcal{O}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^{-1}$ .
- (3)  $D_1 \sim D_2$  *als en slechts als*  $\mathcal{O}(D_1) \cong \mathcal{O}(D_2)$ .

**Bewijs.** Zij  $D$  een Cartier divisor op een schema  $X$ , gerepresenteerd door  $\{(U_i, f_i)\}$ . We definiëren een deelschoof  $\mathcal{O}(D)$  van  $\mathcal{K}$  door  $\mathcal{O}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_X(U_i) \cdot f_i^{-1}$ . Dit is goed gedefinieerd omdat  $f_i/f_j$  inverteerbaar is op  $U_i \cap U_j$ . (1) Omdat  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$  is de afbeelding  $\mathcal{O}_X(U_i) \rightarrow \mathcal{O}(D)|_{U_i}$  gedefinieerd als  $1 \rightarrow f_i^{-1}$  een isomorfisme. De schoof  $\mathcal{O}(D)$  is dus inverteerbaar. Omgekeerd, zij  $\mathcal{L}$  een inverteerbare deelschoof van  $\mathcal{K}$ . We stellen  $f_i$  gelijk aan de inverse van de lokale voortbrenger van  $\mathcal{L}$ . Dit geeft een Cartier divisor  $D$  en  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$ .

(2) Als  $D_1$  lokaal gedefinieerd is door  $f_i$  en  $D_2$  lokaal gedefinieerd is door  $g_i$ , dan is de schoof  $\mathcal{O}(D_1 - D_2)$  lokaal voortgebracht door  $f_i^{-1}g_i$ .  $\mathcal{O}(D_1 - D_2)$  is dan gelijk aan  $\mathcal{O}(D_1) \cdot \mathcal{O}(D_2)^{-1}$  en dit is op zijn beurt isomorf met het tensorproduct  $\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2)^{-1}$ .

(3) Wegens (2) volstaat het te bewijzen dat  $D = D_1 - D_2$  een hoofddivisor is als en slechts als  $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}_X$ . Stel dat  $D$  een hoofddivisor is en dus lokaal gedefinieerd door  $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ . De afbeelding  $1 \rightarrow f^{-1}$  geeft het gewenste isomorfisme. Stel omgekeerd dat zo'n isomorfisme bestaat, dan zal het beeld van 1 onder dit isomorfisme een element geven van  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*)$  en het inverse van dit element definieert een hoofddivisor  $D$ . ■

Uit de vorige stelling volgt dat de afbeelding

$$\Psi : \text{CaCl}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X)$$

gegeven door  $D \rightarrow \mathcal{O}(D)$  een injectief groephomorfisme is. Deze afbeelding is echter niet steeds surjectief. In het volgende geval is dit wel het zo.

**Stelling 13** *Als  $X$  een integraal schema is dan is  $\Psi$  een isomorfisme tussen  $\text{CaCl}(X)$  en  $\text{Pic}(X)$ .*

**Bewijs.** We moeten bewijzen dat elke inverteerbare schoof  $\mathcal{L}$  isomorf is met een deelschoof van  $\mathcal{K}$ . Hiertoe beschouwen we de schoof  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$ . Zij  $U$  een open deel waarop  $\mathcal{L}$  vrij is, dan volgt dat op  $U$ ,  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$ . Nu is  $X$  integraal en dus irreduciebel. De schoof  $\mathcal{K}$  is de schoof  $K(X)$  en wegens de irreducibiliteit van  $X$  volstaat het dat  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}$  constant is voor een open bedekking om een constante schoof te zijn. De afbeelding  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$  geeft weer dat  $\mathcal{L}$  een deelschoof is van  $\mathcal{K}$ . ■

**Definitie 2.3.2** Een Cartier divisor  $D$  op een schema  $X$  is *effectief* als het gerepresenteerd kan worden door een familie  $\{(U_i, f_i)\}$  waarbij alle  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}|_{U_i})$ .

## 2.4 Divisoren op krommen

In het voorgaande beschouwden we steeds een algemeen schema  $X$ . Uiteindelijk willen we eigenschappen weten van divisoren op krommen. Daarom bekijken we wat de impact is op divisoren door eisen te leggen op het schema  $X$ .

### Weil divisoren

**Definitie 2.4.1** Een schema  $X$  heet *regulier in codimensie één* als elke locale ring van dimensie één regulier is. Een schema heet *locaal factoriseerbaar* als elke locale ring een uniek factorisatie domein (UFD) is.

**Definitie 2.4.2** Als  $X$  een noethers, integraal, gesepareerd schema is welke regulier is in codimensie één, dan definiëren we een *priemdivisor* op  $X$  als een gesloten integraal deelschema  $Y$  van codimensie één.

De voorwaarden voor  $X$  uit de vorige definitie noteren we met  $\odot$ .

**Definitie 2.4.3** Stel dat  $X$  voldoet aan  $\odot$ , dan definiëren we een *Weil divisor* op  $X$  als een element van de vrije abelse groep  $\text{Div}(X)$  voortgebracht door priemdivisoren. We noemen een Weil divisor  $D = \sum n_i Y_i$  *effectief* als alle  $n_i \geq 0$ .

Onder de voorwaarde  $\odot$  kunnen we aan elke element  $f \in \text{Rat}_R(X) = K$  een Weil divisor hechten. Inderdaad, als  $Y$  een priemdivisor is op  $X$ , dan is  $Y$  irreduciebel. Stel  $x$  het generieke punt van  $Y$ . De ring  $\mathcal{O}_{X,x}$  heeft dimensie één en is wegens  $\odot$  regulier.

**Definitie 2.4.4** Een reguliere locale ring van dimensie één wordt ook een *discrete valuatie* genoemd. De *valuatie* van  $\text{Rat}(X)$ , gedefinieerd door de discrete valuatie ring  $\mathcal{O}_{X,x}$  noteren we met  $\text{ord}_Y$ .

Zij nu  $f \in K^*$ , dan is  $\text{ord}_Y(f)$  een geheel getal.

**Lemma 7** *Stel dat  $X$  voldoet aan  $\odot$ , en stel dat  $f \in K^*$ . Dan is  $\text{ord}_Y(f) = 0$  voor alle behalve een eindig aantal priemdivisoren.*

**Bewijs.** Zij  $(U, \varphi)$  een representant van  $f$  met  $U$  een affien open deel  $\text{Spec } A$ . Dan is  $Z = X \setminus U$  gesloten en omdat  $X$  noethers is, bevat  $Z$  slechts een eindig aantal priemdivisoren. Omdat  $f$  regulier is op  $U$  zal in ieder geval  $\text{ord}_Y(f) \geq 0$  voor elke priemdivisor  $Y$  in  $U$ . Nu is  $\text{ord}_Y(f) > 0$  als en slechts als  $Y$  bevat is in de gesloten deelverzameling corresponderende met het ideaal  $fA$ . Dit gesloten deel bevat echter een eindig aantal priemdivisoren waaruit het gestelde volgt. ■

**Definitie 2.4.5** Als  $X$  voldoet aan  $\odot$  en als  $f \in K^*$  dan definiëren we de *divisor van  $f$* ,  $(f)$ , als

$$(f) = \sum \text{ord}_Y(f) \cdot Y,$$

waarbij de som genomen wordt over alle priemdivisoren van  $X$ . Uit het vorige lemma volgt dat deze som eindig is waardoor  $(f)$  een Weil divisor wordt. Een Weil divisor van deze vorm heet een *hoofddivisor*.

Zoals in het geval van Cartier divisoren zijn twee Weil divisoren *lineair equivalent* als het verschil van deze divisoren een hoofddivisor is.

Op een schema  $X$  dat voldoet aan  $\odot$  bestaan zowel Cartier divisoren als Weil divisoren. We willen nu graag weten welk verband er tussen deze twee bestaat. De voorwaarden  $\odot$  kunnen lichtjes afgezwakt worden om tot een daadwerkelijk verband te komen. Dit volgt uit de volgende

**Stelling 14** *Zij  $X$  een integraal, gesepareerd, lokaal factoriseerbaar en noethers schema, dan is de groep  $\text{Div}(X)$  isomorf met de groep  $\text{Ca}(X)$ . Onder dit isomorfisme corresponderen Weil hoofddivisoren met Cartier hoofddivisoren en effectieve Weil divisoren met effectieve Cartier divisoren.*

**Bewijs.** Elk uniek factorisatie domein is normaal. Elke noethers normale locale ring van dimensie één is regulier. Onder de gestelde voorwaarden voldoet  $X$  aan  $\odot$ , zodat het inderdaad zin heeft te spreken over Weil divisoren.

Neem een Cartier divisor gegeven door  $\{(U_i, f_i)\}$ , waarbij  $f_i \in K^*$ . Met elke priemdivisor  $Y$  nemen we het geheel getal  $\text{ord}_Y(f_i)$  waarbij  $i$  een index is zodat  $U_i \cap Y \neq \emptyset$ . Als  $j$  een andere index is, dan is  $f_i/f_j$  inverteerbaar in  $U_i \cap U_j$  en  $\text{ord}_Y(f_i/f_j) = 0$ . Zo is dan  $\text{ord}_Y(f_i) = \text{ord}_Y(f_j)$  en de Weil divisor  $D_w = \sum \text{ord}_Y(f_i) \cdot Y$  is goed gedefinieerd. Daar  $X$  noethers is, is dit inderdaad een eindige som.

Als omgekeerd  $D$  een Weil divisor is op  $X$ , dan induceert  $D$  een Weil divisor  $D_x$  op  $\text{Spec } \mathcal{O}_x$  voor elke  $x \in X$ . Nu is  $\mathcal{O}_x$  een UFD of elk priem ideaal van  $\mathcal{O}_x$  met hoogte 1 is een hoofdideaal.  $D_x$  is dan een hoofddivisor, stel  $D_x = (f_x)$ , voor een zekere  $f_x \in K$ . De divisoren  $(f_x)$  en  $D$  hebben dezelfde restrictie tot  $\text{Spec } \mathcal{O}_x$  en verschillen allen op priemdivisoren die niet door  $x$  gaan. Slechts een eindig aantal van deze priemdivisoren hebben een inbreng in  $D$  of in  $(f_x)$  zodat het mogelijk is een open omgeving  $U_x$  van  $x$  te vinden waarop  $D$  en  $(f_x)$  dezelfde restrictie hebben. Bedek  $X$  met een dergelijk bedekking en de  $f_x$  vormen een Cartier divisor. Dat dit inderdaad een goed gedefinieerde Cartier divisor is, volgt uit het feit dat  $\mathcal{O}_x$  een UFD is (zie [H]). Deze constructies zijn elkaars inversen waaruit de isomorfie volgt. De rest van de opgave volgt uit de constructie. ■

Uit deze stelling en stelling 13 volgt

**Gevolg 15** *Als  $X$  een noethers, integraal, gesepareerd en lokaal factoriseerbaar schema is, dan is  $\text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X)/\sim$ .*

## Divisoren op krommen

We passen de resultaten uit de vorige paragrafen toe op het geval dat  $X$  een één-dimensionaal integraal, gesepareerd schema is van eindig type over een algebraïsch gesloten veld, het is te zeggen een kromme.

Op de kromme  $X$  bestaan, net zoals op elk schema, Cartier divisoren. Wegens stelling 13 is verder elke inverteerbare schoof isomorf met een Cartier divisor. Dus voor een  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$  is er een  $D_c \in \text{Ca}(X)$  zodanig dat  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(D_c)$ . Wat is het verband met Weil divisoren? Om van Weil divisoren te kunnen spreken moet aan voorwaarde  $\odot$  voldaan zijn of aan de voorwaarde uit stelling 14.

Dit laatste is bijvoorbeeld het geval wanneer  $X$  normaal is. Elke noetherse normale locale ring is namelijk een reguliere ring en elke locale reguliere ring van dimensie één is een uniek factorisatie domein. Zij  $X$  een normale kromme dan kunnen we besluiten dat met elke Weil divisor

$$D = \sum n_i p_i$$

waarbij  $p_i$  gesloten punten zijn, een Cartier divisor  $D_c$  correspondeert. gevolg 15 geeft bovendien een 1–1 verband tussen Weil divisoren en inverteerbare schoven.

## 2.5 Lineaire systemen

In hetgeen volgt bekijken we hoe globale secties van een inverteerbare schoof aanleiding geven tot effectieve divisoren op een variëteit. Zij  $X$  namelijk een niet singuliere projectieve

variëteit over een algebraïsch gesloten veld  $k$  en  $\mathcal{L}$  een inverteerbare schoof op  $X$ . Zij verder  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  een sectie van  $\mathcal{L}$  verschillend van nul. De effectieve divisor  $D = (s)_0$ , de *nuldivisor* van  $s$  genaamd, is gedefinieerd als volgt:

Voor elke open  $U \subset X$  zodanig dat  $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}|_U$  onder het isomorfisme  $\varphi$ , nemen we  $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}|_U)$ . We krijgen zo een verzameling  $\{(U, \varphi(s))\}$  welke een Cartier divisor  $D$  op  $X$  bepaalt. We hebben de volgende

**Stelling 16** *Zij  $X$  een niet singuliere projectieve variëteit over een algebraïsch gesloten veld  $k$ . Zij  $D_0$  een divisor op  $X$  en  $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D_0)$  de corresponderende inverteerbare schoof dan geldt*

- (1) *Voor elke  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}), s \neq 0$ , de nuldivisor  $(s)_0$  is een effectieve divisor lineair equivalent met  $D_0$ .*
- (2) *Elke effectieve divisor, lineair equivalent met  $D_0$  is van de vorm  $(s)_0$  voor een zekere  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ .*
- (3) *Twee secties  $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  hebben dezelfde nuldivisor als en slechts als  $s' = \lambda s$  voor een  $\lambda \in k^\star$*

**Bewijs.** We identificeren  $\mathcal{L}$  met de deelschoof  $\mathcal{L}(D_0)$  van  $\mathcal{K}$ .  $s$  correspondeert dan met een rationale functie  $f \in K$ . Als  $D_0$  lokaal gedefinieerd is als Cartier divisor door  $\{(U_i, f_i)\}$  met  $f_i \in \mathcal{K}^\star$ , dan is  $\mathcal{L}(D_0)$  lokaal gegenereerd door  $f_i^{-1}$  en we krijgen zo een lokaal isomorfisme  $\psi : \mathcal{L}(D_0) \rightarrow \mathcal{O}$  door vermenigvuldiging met  $f_i$ . Hieruit volgt dat  $D$  lokaal gedefinieerd is als  $f_i f$ .  $D = D_0 + (f)$ , zodat  $D \sim D_0$ .

Als  $D > 0$  en  $D = D_0 + (f)$ , dan is  $(f) \geq -D_0$ .  $f$  geeft dus een globale sectie van  $\mathcal{L}(D_0)$  met als nuldivisor  $D$ .

Als  $(s)_0 = (s')_0$  dan corresponderen  $d$  en  $s'$  met  $f, f' \in K$  zodat  $(f/f') = 0$ . Hieruit volgt dat  $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\star)$ . Maar  $X$  is een projectieve variëteit over een algebraïsch gesloten veld  $k$ , en dus  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$  en  $f/f' \in k^\star$ . ■

**Definitie 2.5.1** Een *compleet lineair systeem* op een niet singuliere projectieve variëteit  $X$  is de verzameling van alle effectieve divisoren, lineair equivalent met een gegeven divisor  $D_0$ . We noteren deze verzameling met  $|D_0|$ .

Uit de vorige stelling volgt een 1-1 correspondentie tussen de verzameling  $|D_0|$  en de verzameling  $(\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)) - \{0\})/k^\star$ , zodat  $|D_0|$  de structuur van een projectieve ruimte krijgt. We vragen ons af of deze ruimte een eindig dimensionale vectorruimte is.

## 2.6 De eindigheidsstelling

We gaan nu de eindigheid van de vectorruimte  $\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0))$  bewijzen. Hiervoor is enige kennis van cohomologie vereist. Daar een inleiding in cohomologie een mini-cursus op zich zou worden, verwijzen we hiervoor naar [L], [H] en [I] voor een algebraïsche benadering, terwijl een axiomatische benadering door [W] uiteengezet wordt.

## De twistende schoof $\mathcal{O}(1)$

Nemen we een gegradueerde ring  $S$  en stellen we  $X = \text{Proj } S$ . Uit paragraaf 1.4 van hoofdstuk 1 weten we dat  $\text{Proj } S$  schema is. Voor de ring  $S$  definiëren we

**Definitie 2.6.1** Een *gegradueerd*  $S$ -moduul  $M$ , is een  $S$ -moduul met een ontbinding  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  zodanig dat  $S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$ .

We definiëren voorts voor elke  $l \in \mathbb{Z}$  het *getwiste* moduul  $M(l)$  door  $l$  plaatsen naar links op te schuiven. Dit wil zeggen  $M(l)_d = M_{d+l}$ .

We vatten  $S$  nu op als gegradueerd  $S$ -moduul.

**Definitie 2.6.2** Voor elke  $n \in \mathbb{Z}$  stellen we  $\mathcal{O}_X(n)$  het  $\mathcal{O}_X$ -moduul geassocieerd aan  $S(n)$ . De *twistende schoof* is het  $\mathcal{O}_X$ -moduul  $\mathcal{O}_X(1)$ . Voor een willekeurig  $\mathcal{O}_X$ -moduul  $\mathcal{F}$ , noteren we de *getwiste schoof*  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$  met  $\mathcal{F}(n)$ .

De schoof  $\mathcal{O}_X(1)$  speelt een belangrijke rol in de algebraïsche meetkunde.

**Definitie 2.6.3** Een inverteerbare schoof  $\mathcal{L}$  wordt *schatrijk* genoemd ten opzichte van een schema  $Y$  als er een immersie  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^r$  bestaat voor een zekere  $r$ , zodanig dat  $i^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$ .

Men kan bewijzen dat voor een noethers schema  $Y$ , een  $Y$ -schema  $X$ , projectief is, als en slechts als  $X$  eigenlijk is over  $Y$  en er een schatrijke schoof op  $X$  bestaat ten opzichte van  $Y$  (zie [H]).

Een andere eigenschap van  $\mathcal{O}(1)$  is dat het globale secties heeft over een projectieve ruimte, in tegenstelling tot de schoof  $\mathcal{O}$ .

## De cohomologie van de projectieve ruimte

Zoals hoger opgemerkt is het hier niet de bedoeling al te veel uit te wijden over cohomologie van schoven. In deze paragraaf tonen we wat de cohomologie is van de projectieve ruimte  $X = \mathbb{P}_A^r$  met  $A$  een noetherse ring. Stellen we  $S = A[x_1, \dots, x_r]$  dan geldt

**Stelling 17** *Met de notaties van hierboven geldt*

- a)  $S \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$  als gegradueerde  $S$ -modulen;
- b)  $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$  voor  $0 < i < r$  en alle  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- c)  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$ .

**Bewijs.** We verwijzen hiervoor naar [H]. ■

## De eindigheidstelling van Serre

**Lemma 8** *Zij  $X$  een schema en  $\mathcal{L}$  een inverteerbare schoof. Neem een  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  en stel  $X_f$  gelijk aan de verzameling van punten  $x \in X$  met  $f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ . Neem verder een quasi-coherente schoof  $\mathcal{F}$  op  $X$ . Dan geldt:*

a) *Als  $X$  quasi-compact is en  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  een globale sectie zodanig dat de restrictie van  $s$  tot  $X_f$  nul is, dan bestaat er een  $n > 0$  met de eigenschap dat  $f^n s = 0$ . Hierbij is  $f^n s$  beschouwd als globale sectie van  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ .*

b) *Stel bovendien dat voor een open affiene bedekking  $\{U_i\}$  van  $X$  zodanig dat  $\mathcal{L}|_{U_i}$  vrij is voor elke  $i$ , geldt dat  $U_i \cap U_j$  quasi-compact is voor elke  $i, j$ . Dan bestaat er, gegeven een sectie  $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$ , een  $n > 0$  zodanig dat  $f^{nt} \in \Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  uitbreidt tot een globale sectie van  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ .*

**Bewijs.** Om a) te bewijzen bedekken we  $X$  met een eindig aantal open affiene delen  $U = \text{Spec } A$  zodanig dat  $\mathcal{L}|_U$  vrij is. Zij  $\psi : \mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$  een isomorfisme dat het vrij zijn van  $\mathcal{L}|_U$  uitdrukt.  $\mathcal{F}|_U \cong M$  voor een  $A$ -moduul  $M$ . De sectie  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  restringeert zo tot een element  $s \in M$ . De sectie  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  restringeert tot een sectie van  $\mathcal{L}|_U$  dat op zijn beurt een element  $g = \psi(f) \in A$  geeft. Dit opgemerkt zijnde, is het duidelijk dat  $X_f \cap U = D(g)$ . Het volstaat nu te bewijzen dat uit  $s|_{X_f \cap U} = 0$  volgt dat  $g^n s = 0$  in  $M$  voor een zekere  $n > 0$ . Als dit het geval is, is  $f^n s$  een element van  $\Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  onder het isomorfisme

$$\text{id} \times \psi^{\otimes n} : \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}|_U) \cong \mathcal{F}|_U.$$

Bovendien is  $f^n s = 0$  als element van  $\Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ . Dit is onafhankelijk van  $\psi$  zodat we dit doen voor elk open deel van de bedekking. We kiezen  $n$  groot genoeg en vinden dat  $f^n s = 0$  op  $X$ . Er rest ons nog te bewijzen dat  $s|_{X_f \cap U} = 0$  impliceert dat  $g^n s = 0$  in  $M$  voor een zekere  $n > 0$ . Om dit te bewijzen merken we op dat  $\text{Spec } A_g \cong D(g) \subset U = \text{Spec } A$  en we noteren de inclusieafbeelding met  $i$ . We berekenen nu  $\mathcal{F}|_{D(g)}$ . Dit is  $i^* \mathcal{F}$ , wat op zijn beurt per definitie gelijk is aan  $(M \otimes_A A_g)^\sim$ . We bedekken  $U$  met open delen van de vorm  $D(g_i)$  met  $g_i \in A$ . Merk op dat een eindig aantal hiervan volstaat. De sectie  $s|_{D(g)}$  geeft zo een element  $s_i \in (M \otimes_A A_{g_i})_g$  en is hierin 0. Wegens de definitie van localisatie bestaat er dan een zekere  $n > 0$  zodat  $g^n s_i = 0$  in  $M_{g_i}$ . Nemen we nu een  $n$  groot genoeg, dan geldt dit voor elke  $i$ . De open delen  $D(g_i)$  bedekken  $U$  zodat  $g^n s = 0$  in  $M$ .

Voor het bewijs van b) restringeren we de sectie  $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$  tot  $X_f \cap U_i = D(g_i)$  met de  $U_i$  uit de opgave. Zij  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M}^i$  dan bekommen we een element  $t_i \in M_{g_i}^i$ . We bedekken  $U_i$  met open delen van de vorm  $D(g_{ij})$  en de restrictie van  $t_i$  tot  $D(g_{ij}) \cap U_i \cap X_f$  geeft een element  $t_{ij} \in (M_{g_{ij}}^i)_{g_i}$ . Wegens de definitie van localisatie bestaat er een  $n > 0$  en een element  $t^j \in M_{g_{ij}}^i$  met restrictie  $g_i^n t_{ij}$  in  $D(g_i g_{ij})$ . Op de doorsnede  $D(g_{ij} \cap g_{ik})$  hebben we twee secties  $t^i$  en  $t^k$  die gelijk zijn op  $D(g_i g_{ij} g_{ik})$ . Uit het bewijs van a) volgt dan dat er een  $m > 0$  bestaat zodanig dat  $g_i^m (t^i - t^k) = 0$  op  $D(g_i g_{ij} g_{ik})$ . Door  $m$  groot genoeg te kiezen bekommen we zo een sectie  $t'_i$  op  $U_i$  met als restrictie tot  $X_f$ ,  $g_i^{n+m} t'_i$ . We bekommen zo door het isomorfisme  $\text{id} \times \psi_i^{\otimes (n+m)}$  uit a) voor elke  $U_i$  een sectie  $t'_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes (n+m)})$ . In  $U_i \cap U_j \cap X_f$  zal de sectie  $t'_i - t'_j$  nul zijn zodat wegens het quasicompact zijn en uit a) volgt dat  $f^{n_1}|_{U_i \cap U_j} (t'_i - t'_j) = 0$  op  $U_i \cap U_j$ . De verzameling  $\{f^{n_1} t'_i\}$  vormt zo een globale sectie op  $X$  van  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes (n+m+n_1)}$ . Stel nu  $n = n + m + n_1$  waaruit het gestelde volgt. ■

**Definitie 2.6.4** Een schoof  $\mathcal{F}$  van  $\mathcal{O}_X$ -modulen op  $X$  is *voortgebracht door globale secties* als er een familie van globale secties  $\{s_i\}_{i \in I}$  bestaat met  $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ , zodanig dat voor elke  $x \in X$ , de beelden van  $s_i$  in de staak  $\mathcal{F}_x$ , deze staak voortbrengen als  $\mathcal{O}_X$ -moduul.

**Stelling 18 (Serre)** *Zij  $X$  een projectief schema over een noetherse ring  $A$ . Zij  $\mathcal{O}_X(1)$  een schatrijke inverteerbare schoof op  $X$  en  $\mathcal{F}$  een coherent  $\mathcal{O}_X$ -moduul. Dan bestaat er een  $n_0$  zodanig dat voor alle  $n \geq n_0$ , de schoof  $\mathcal{F}(n)$  voortgebracht is door een eindig aantal globale secties.*

**Bewijs.** Stel dat  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_A^r$  een gesloten immersie is zodanig dat  $i^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}_X(1)$ . Dan is  $i_*\mathcal{F}$  coherent op  $\mathbb{P}_A^r$  en  $i_*(\mathcal{F}(n)) = (i_*\mathcal{F})(n)$ . Hieruit volgt dat  $\mathcal{F}(n)$  voortgebracht is door globale secties als en slechts als  $i_*(\mathcal{F}(n))$  dit is. We mogen dan stellen dat  $X = \mathbb{P}_A^r$ .

Wegens de definitie van  $\mathbb{P}_A^r$  wordt  $X$  bedekt door  $r + 1$  open delen  $D_+(x_i)$ . Nu is  $\mathcal{F}$  coherent, zodat voor elke  $i = 0, 1, \dots, r$  geldt dat  $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} \cong \widehat{M}_i$  waarbij  $M_i$  een eindig voortgebracht  $B_i = A[x_0/x_i, \dots, x_r/x_i]$ -moduul is. Neem voor elke  $i$  een eindig aantal elementen  $s_{ij} \in M_i$  die dit moduul voortbrengen. Wegens het vorige lemma bestaat er een  $n > 0$  zodanig dat  $x_i^n s_{ij}$  uitgebreid kan worden tot een sectie  $t_{ij}$  van  $\mathcal{F}(n)$ . We nemen nu  $n$  groot genoeg zodanig dat dit geldt voor alle  $i$  en  $j$ .  $\mathcal{F}(n)$  correspondeert op  $D_+(x_i)$  met een  $B_i$ -moduul  $M'_i$ . De afbeelding

$$x_i^n : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(n)$$

induceert zo een isomorfisme tussen  $M_i$  en  $M'_i$  waaruit we besluiten dat de secties  $x_i^n s_{ij}$   $M'_i$  voortbrengen en de secties  $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$  brengen de schoof  $\mathcal{F}(n)$  overal voort. ■

Stel dat  $\mathcal{F}(n)$  voortgebracht is door  $N$  globale secties, dan is er een surjectie  $\bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}(n) \rightarrow 0$ . Na tensoriëring met  $\mathcal{O}_X(-n)$  volgt dat elke coherenten schoof te schrijven is als quotiënt van een directe som van twistende schoven.

**Stelling 19 (Serre)** *Zij  $X$  een projectief schema over een noetherse ring  $A$ . Zij  $\mathcal{F}$  een coherenten schoof op  $X$  en  $\mathcal{O}_X(1)$  een schatrijke schoof op  $X$  over  $\text{Spec } A$ , dan is*

- 1)  $\forall i \geq 0, H^i(X, \mathcal{F})$  eindig voortgebracht.
- 2)  $\exists n_0 : \forall i > 0$  en  $n \geq n_0$   $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$

**Bewijs.** Een eerste stap in het bewijs is de reductie tot het geval  $X = \mathbb{P}_A^r$ . De schoof  $\mathcal{O}_X(1)$  is een schatrijke schoof op  $X$  over  $\text{Spec } A$  zodat er wegens definitie 2.6.3 een immersie  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_A^r$  bestaat voor een zekere  $r$ . Deze immersie heeft de eigenschap dat  $\mathcal{O}_X(1) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}(1))$ . Verder geldt voor een willekeurige coherenten schoof  $\mathcal{F}$  op  $X$ , dat  $i_*\mathcal{F}$  een coherenten schoof is op  $\mathbb{P}_A^r$ . Verder bewijst men in de cohomologie dat  $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}_A^r, i_*\mathcal{F})$ . Hieruit volgt dat we  $X = \mathbb{P}_A^r$  mogen stellen.

Uit stelling 17 volgt dat 1) en 2) gelden voor elke schoof van de vorm  $\mathcal{O}(q)$  met  $q \in \mathbb{Z}$ . Ook voor elke directe som van dergelijke schoven is het gestelde dan bewezen.

Nemen we een willekeurige coherenten schoof  $\mathcal{F}$  op  $X$ , dan kunnen we  $\mathcal{F}$  schrijven als quotiënt van een schoof  $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}(q_i)$  voor zekere  $q_i \in \mathbb{Z}$ . Het bewijs verloopt door dalende

inductie op  $i$ . We merken op dat voor  $i > r$ , de modulen  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  omdat  $X$  bedekt kan worden door  $r + 1$  affiene delen. (Berekening via Čech-cohomologie geeft dit resultaat onmiddellijk). Zij nu  $\mathcal{R}$  de kern,

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Zijn twee van de drie schoven coherent, dan is de derde dit ook. Dit volgt uit een stelling van Serre (Zie [FAC], stelling 1). Dan is ook  $\mathcal{R}$  coherent wegens een stelling van Serre, en we verkrijgen een lange exacte cohomologierij van  $A$ -modulen

$$\cdots \rightarrow H^i(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \rightarrow \cdots.$$

Het moduul links in de rij, is eindig voortgebracht omdat  $\mathcal{E}$  een directe som is van  $\mathcal{O}(q_i)$ . Door de inductiehypothese is het rechtse moduul ook eindig voortgebracht. Wegens het feit dat  $A$  een noetherse ring is, is ook het middelste moduul eindig voortgebracht. Dit bewijst 1).

Voor het bewijs van 2), ‘twisten’ we bovenstaande korte exacte rij en verkrijgen de lange cohomologierij

$$\cdots \rightarrow H^i(X, \mathcal{E}(n)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}(n)) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \rightarrow \cdots.$$

Als  $n \gg 0$  verdwijnt het linkse moduul weeral omdat  $\mathcal{E}$  een directe som is van  $\mathcal{O}(q_i)$ . Omwille van de inductiehypothese verdwijnt ook het rechtse moduul. Voor een  $n \gg 0$  verdwijnt dan ook het middelste. We moeten slechts een eindig aantal  $i$ 's in acht nemen, namelijk  $0 < i \leq r$ , zodat het volstaat een  $n_0$  te bepalen voor elke  $i$  afzonderlijk. Dit bewijst 2). ■

## 2.7 Gevolgen van de eindigheidstelling

In deze paragraaf nemen we voor  $X$  een  $k$ -compleet schema.

### De Euler-Poincaré karakteristiek

Zij  $\mathcal{F}$  een coherente schoof op  $X$ . We weten nu dat de dimensie van  $H^i(X, \mathcal{F}) < \infty$  voor elke  $i$ . We kunnen echter meer zeggen:

**Stelling 20 (Grothendieck)** *Als  $X$  een noetherse topologische ruimte is,  $\mathcal{F}$  een schoof op  $X$ , en  $q > \dim X$  dan is  $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ .*

**Bewijs.** We verwijzen hiervoor naar [H]. ■

Deze zeer algemene stelling, toegepast op onze situatie hier, leert ons dat slechts een eindig aantal dimensies  $\dim H^i(X, \mathcal{F})$  overblijven. Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie

**Definitie 2.7.1** Zij  $X$  een  $k$ -compleet schema en  $\mathcal{F}$  een coherente schoof op  $X$ . De som  $\chi_{\Gamma}(\mathcal{M}) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim_k H^q(\Gamma, \mathcal{M})$  is eindig en wordt de *Euler-Poincaré karakteristiek* van  $\mathcal{F}$  op  $X$  genoemd. We noteren deze som met  $\chi_X(\mathcal{F})$  of nog  $\chi(\mathcal{F})$ .

De Euler-Poincaré karakteristiek  $\chi_X(\mathcal{F})$  die afkomstig is uit de topologie voldoet aan de volgende

**Stelling 21** *Als de volgende rij van coherente  $\mathcal{O}_X$ -modulen*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

*exact is, dan is  $\chi_X(\mathcal{F}) = \chi_X(\mathcal{F}') + \chi_X(\mathcal{F}'')$ .*

**Bewijs.** Uit de theorie van de cohomologie van schoven volgt dat een korte exacte rij

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

een lange exacte cohomologie rij

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}'') \\ \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}'') \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

tot gevolg heeft. De gezochte eigenschap volgt dadelijk hieruit. ■

Een variant van stelling 20 is

**Stelling 22** *Als  $X$  een schema is en  $\mathcal{F}$  een coherente schoof, dan geldt dat  $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$  als  $q > \dim(\text{supp}(\mathcal{F}))$ .*

**Bewijs.** We verwijzen hiervoor naar [I]. ■

---

## RIEMANN-ROCH

Van de stelling van Riemann-Roch zijn er verschillende bewijzen. Bewijzen die steunen op cohomologie en schoven vindt men in [H], [I] en [Serre]. Een meetkundig bewijs wordt gegeven door Fulton [Fu]. Het bewijs dat we hier geven volgt Iitaka [I]. Van de lezer wordt wel verwacht bepaalde stappen te aanvaarden zonder bewijs. Met name de theorie van spectraalrijen en de dualiteits-stelling van Serre. Deze veronderstellen een dergelijke kennis van cohomologie, dat het binnen dit kader niet mogelijk is hierop in te gaan.

### 3.1 De normalisatie van schema's

**Definitie 3.1.1** Zij  $B$  een deelring van  $A$ . Als elk element van  $A$  dat integraal is over  $B$ , dus aan een monische veelterm over  $B$  voldoet, tot  $B$  behoort, dan zegt men dat  $B$  *integraal gesloten* is in  $A$ . Als  $A$  een integraaldomein is dat integraal gesloten is in zijn breukenveld, dan is  $A$  een *normale ring*. Noteert men met  $A'_L$  de verzameling  $\{\alpha \in L \mid \alpha \text{ is integraal over } A\}$  met  $L$  een veld dat  $A$  bevat, dan is  $A'_L$  een normale ring en wordt de *integrale sluiting* van  $A$  in  $L$  genoemd.

Zij  $X$  een integraal schema en noteren we met  $\Omega^*$  de verzameling van alle open affiene  $U \subset X$ , dan definiëren we voor een zeker veld  $L$ ,

$$\mathcal{A}(U) = A(U)'_L.$$

Is  $V \subseteq U$  en  $V \in \Omega^*$ , dan zal  $A(U) \subseteq A(V)$  en dus  $\mathcal{A}(U) \subseteq \mathcal{A}(V)$ . Nemen we voor alle  $V \subset U$  als  $\rho_V^U$  de inclusieafbeelding  $\mathcal{A}(U) \hookrightarrow \mathcal{A}(V)$  dan is op een triviale manier aan de voorwaarden van een preschoof voldaan. Dat  $\mathcal{A}$  een schoof is vraagt wat meer werk.

**Lemma 9** (i) *Is  $S$  een multiplicatief gesloten deelverzameling van een normale ring met  $0 \notin S$ , dan is  $S^{-1}A$  een normale ring.* (ii) *Zij  $A$  een integraal domein (geen nuldelers) en  $L$  een veld dat  $A$  bevat, dan is voorts*

$$(S^{-1}A)'_L = S^{-1}(A'_L).$$

**Bewijs.**

(i) Zij  $a/b$  met  $a, b \in A$  integraal over  $S^{-1}A$ . Er bestaan dan  $a_1, \dots, a_m \in A$  en  $s \in S$  zodanig dat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m + \frac{a_1}{s} \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + \dots + \frac{a_m}{s} = 0$$

en dus

$$\left(\frac{sa}{b}\right)^m + a_1 \left(\frac{sa}{b}\right)^{m-1} + \dots + a_m s^{m-1} = 0.$$

$A$  is normaal zodat  $sa/b \in A$  waaruit  $a/b \in S^{-1}A$  volgt.

(ii) Uit (i) volgt dat  $S^{-1}(A'_L)$  normaal is en  $S^{-1}A$  bevat zit in  $S^{-1}(A'_L)$ .  $S^{-1}(A'_L)$  is integraal over  $S^{-1}A$  en het breukenveld  $Q(S^{-1}(A'_L)) = Q(A'_L) = Q((S^{-1}A)'_L)$ .  $S^{-1}(A'_L)$  is dan de integrale sluiting van  $S^{-1}A$  in  $L$ . ■

Neem nu  $U \in \Omega^*$ ,  $A = A(U)$  en  $a \in A$  dan is wegens het voorgaande lemma

$$\mathcal{A}(D(a)) = (A(U)_a)'_L = (A_a)'_L = (A'_L)_a = A'_L \otimes_A A_a = \mathcal{A}(U) \otimes_A A_a.$$

Zij  $\{U_i \mid i \in I\}$  een open affiene bedekking van  $U$ . We hebben dan zeker  $\mathcal{A}(U) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}(U_i)$ . Elke  $U_i$  kan bedekt worden door open affiene delen van de vorm  $D(a_{ij})$  met  $a_{ij} \in A(U)$  zodanig dat  $\mathcal{A}(U_i) \subseteq \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}(D(a_{ij}))$ . Omdat  $U$  affien is, is  $U$  quasi-compact zodat er een eindige deelverzameling  $\{a_1, \dots, a_r\}$  van  $\{a_{ij}\}$  bestaat zodanig dat  $U = \bigcup_{i=1}^r D(a_i)$ . Nu is

$$\bigcap_{i,j} \mathcal{A}(D(a_{ij})) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{A}(D(a_i)) = \bigcap_{i=1}^r (\mathcal{A}(U) \otimes_A A_{a_i}) = \mathcal{A}(U)$$

en dus  $\mathcal{A}(U) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}(U_i)$  zodat  $\mathcal{A}$  een schoof is.

**Definitie 3.1.2** De schoof  $\mathcal{A}$  wordt de *integrale sluiting* van  $\mathcal{O}_X$  in  $L$  genoemd. We noteren  $\mathcal{A}$  met  $(\mathcal{O}_X)'_L$ .

We schetsen hieronder hoe men een normalisatie van een integraal schema bekomt. Neem een open deel  $U$  van  $X$  en stel  $Y_U = \text{Spec } A(U)'_L$ . We hebben dan de volgende situatie

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A(U)'_L & \rightsquigarrow & A(U)'_L \\ {}^{a i_U} \downarrow & & \uparrow i_U \\ U & \rightsquigarrow & A(U) \end{array}$$

waarbij  $i_U : A(U) \rightarrow A(U)'_L$  de inclusieafbeelding is en  ${}^a i_U$  de geassocieerde afbeelding. We nodigen de lezer uit om wat plakwerk te verrichten met behulp van het volgende

**Lemma 10** Zij  $\{Y_i \mid i \in J\}$  een verzameling van geringde ruimten,  $\{Y_{ij} \mid i, j \in J\}$  een verzameling van open delen  $Y_{ij}$  van  $Y_i$  en  $\{\eta_{ij} \mid i, j \in J\}$  een verzameling van isomorfismen  $\eta_{ij} : Y_{ij} \rightarrow Y_{ji}$  die aan de volgende drie voorwaarden voldoen

- (1)  $Y_i = Y_{ii}$  en  $\eta_{ii} = id_{Y_i}$ ;

$$(2) \quad \eta_{ij} \circ \eta_{ji} = id_{Y_{ij}};$$

$$(3) \quad \eta_{ij} \circ \eta_{jl} |_{Y_{ijl}} = \eta_{il} |_{Y_{ijl}} \text{ met } Y_{ijl} = Y_{lj} \cap \eta_{jl}^{-1}(Y_{ji}).$$

Dan bestaat er een geringde ruimte  $X$ , een open bedekking  $\{X_i \mid i \in J\}$  van  $X$  en een verzameling isomorfismen  $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in J\}$  zodanig dat  $\eta_{ji} = f_j \circ f_i^{-1} |_{Y_{ij}}$  voor alle  $i, j \in J$ .

en aan te tonen dat de  $Y_U$  samen met de  ${}^a i_U = \mu_U$  een schema  $Y$  geven samen met een morfisme  $\mu : Y \rightarrow X$  zodanig dat  $\mu^{-1}(U) \cong Y_U$ . We noemen het paar  $(Y, \mu)$  de *integrale sluiting* van het schema  $X$  in  $L$ , of nog:  $Y$  is de  *$L$ -normalisatie* van  $X$ . We noteren dit met  $X'_L$ .

**Definitie 3.1.3** De  $\text{Rat}_R(X)$ -normalisatie van een integraal schema  $X$  wordt de *normalisatie* van  $X$  genoemd.

Als verder  $X$  een variëteit is, dan bewijst men dat ook  $X'_L$  een variëteit is.

## 3.2 De normalisatie van een kromme

In de rest van dit hoofdstuk nemen we voor  $X$  een kromme over een algebraïsch gesloten veld  $k$ , zoals gedefinieerd in hoofdstuk 1. We noteren de normalisatie van  $X$  met  $X'$ . We merken op dat wegens onze constructie  $\mu_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}'_X$ .

Wat we nu willen weten is hoe de verzameling van niet normale punten van  $X$  er uitziet. Hiervoor stellen we  $\mathcal{Z} = (\mathcal{O}_X)' / \mathcal{O}_X$  en bekijken de kern van afbeelding:

$$\eta : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$$

waarin  $\eta_U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{Z}(U), \mathcal{Z}(U))$  voor elke open  $U$  en waarbij  $\eta_U(\alpha)(\beta) = \alpha |_W \cdot \beta$  voor elke  $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$  en  $\beta \in \mathcal{Z}(W)$  met  $W$  een open deel van  $U$ . Deze kern is een schoof van idealen van  $\mathcal{O}_X$  en bepaalt een gesloten deelschema  $Z$  van  $X$ . Wanneer is  $p \in Z$ ? We herinneren eraan dat  $Z = \text{supp}(\mathcal{O}_X / \ker \eta)$  en dus

$$p \in Z \iff (\mathcal{O}_X / \ker \eta)_p \neq 0,$$

hetgeen betekent dat  $\exists a \in \mathcal{O}_{X,p}, \exists b \in (\mathcal{O}_{X,p})' : a \cdot b \in (\mathcal{O}_{X,p})' \setminus \mathcal{O}_{X,p}$  zodat

$$p \in Z \iff \mathcal{Z}_p \neq 0 \iff (\mathcal{O}_{X,p})' \neq \mathcal{O}_{X,p} \iff p \text{ is niet normaal.}$$

Voor krommen zal  $(\mathcal{O}_{X,p})' / \mathcal{O}_{X,p}$  een eindig dimensionale  $k$ -vectorruimte worden. De volgende definitie heeft dan ook zin.

**Definitie 3.2.1** De dimensie  $\dim_k \left( \frac{(\mathcal{O}_{X,p})'}{\mathcal{O}_{X,p}} \right)$  noteren we met  $\delta(X)_p$ .

In het geval van krommen kan men meer zeggen. Het is namelijk zo dat de verzameling van niet normale punten een eindige verzameling is. We merken op dat ook voor willekeurige variëteiten  $\delta(X)_p$  eindig is, maar de verzameling van niet-normale punten heeft dan niet noodzakelijk een eindige cardinaliteit. Uit de theorie van variëteiten is bekend dat niet singuliere punten normale punten zijn, en zo is  $\delta(X)_p > 0$  als en slechts als  $p$  een singulier punt is.

### 3.3 De stelling van Riemann-Roch

Deze paragraaf effent het pad voor de stelling van Riemann-Roch. Er wordt een verband bewezen tussen de dimensies van de cohomologiegroepen van de kromme en die van zijn normalisatie. We noteren onze kromme met  $\Gamma$  en zijn normalisatie met  $(C, \mu)$ .

Neem de exacte rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma \longrightarrow (\mathcal{O}_\Gamma)' \longrightarrow (\mathcal{O}_\Gamma)'/\mathcal{O}_\Gamma \longrightarrow 0$$

en tensorieer deze met een inverteerbare schoof  $\mathcal{L}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \longrightarrow (\mathcal{O}_\Gamma)' \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \longrightarrow (\mathcal{O}_\Gamma)'/\mathcal{O}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

Nu is  $\mathcal{O}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \cong \mathcal{L}$  zodat

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow (\mathcal{O}_\Gamma)' \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

De schoven die we hier gebruiken zijn alle coherent en de krommen  $\Gamma$  en  $C$  zijn  $k$ -compleet. We kunnen hier dus spreken van de *Euler-Poincaré karakteristiek* van coherente schoven zoals gedefinieerd aan het eind van hoofdstuk 2. Verder volgt uit de vorige exacte rij dat

$$\chi_\Gamma((\mathcal{O}_\Gamma)' \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}) = \chi_\Gamma(\mathcal{L}) + \chi_\Gamma(\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}).$$

Hernemen we onze opmerking dat  $(\mathcal{O}_\Gamma)' = \mu_*\mathcal{O}_C$  en merken we daarenboven op dat  $\mu : C \rightarrow \Gamma$  een affien morfisme is. We kunnen op  $\mu$  de projectiestelling toepassen. Hier toegepast geeft dit

$$(\mathcal{O}_\Gamma)' \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \cong \mu_*\mathcal{O}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L} \cong \mu_*(\mu^*\mathcal{L}).$$

De theorie van de Leray spectral sequence leert ons dat

$$\chi_\Gamma((\mathcal{O}_\Gamma)' \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}) = \chi_\Gamma(\mu_*(\mu^*\mathcal{L})) = \chi_C(\mu^*\mathcal{L}).$$

Voor elke  $p$  is  $(\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L})_p \cong \mathcal{Z}_p$  en hierdoor is  $\text{supp}(\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}) = Z$ . De  $\dim Z = 0$  en  $\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}$  is coherent. Als  $q > \dim(\text{supp}(\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}))$ , in dit geval als  $q \geq 1$ , dan is  $H^q(\Gamma, \mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}) = 0$ . Dit geeft

$$\chi_\Gamma(\mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}) = \dim_k \Gamma(Z, \mathcal{Z} \otimes_{\mathcal{O}_\Gamma} \mathcal{L}) = \sum_{p \in Z} \delta(\Gamma)_p \stackrel{\text{not}}{=} \delta(\Gamma).$$

Uiteindelijk volgt dat

$$\chi_C(\mu^*\mathcal{L}) - \chi_\Gamma(\mathcal{L}) = \delta(\Gamma)$$

en voor  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_\Gamma$  is

$$\chi_C - \chi_\Gamma = \delta(\Gamma).$$

De nulde cohomologiegroepen  $H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$  en  $H^0(C, (\mathcal{O}_\Gamma)')$  zijn gelijk aan  $k$ . Het bewijs hiervan steunt op het feit dat  $k$  algebraïsch gesloten is. We hebben dus de volgende stelling bewezen.

**Stelling 23** *Met de notaties van hierboven geldt dat*

$$\dim_k H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) - \dim_k H^1(C, (\mathcal{O}_\Gamma)') = \delta(\Gamma).$$

Zij  $C$  een complete normale kromme en  $\mathcal{L}$  een inverteerbare schoof.

**Definitie 3.3.1** *Zij  $X$  een schema en  $p \in X$ . Het restklassenveld in het punt  $p$ , is het veld  $k(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$ .*

**Lemma 11** *Als  $p$  een gesloten punt is op  $C$  dan is*

- (i)  $\chi_C(\mathcal{L}) = \chi_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-p)) + \deg p$  met  $\deg p = \dim_k k(p)$ ;
- (ii)  $\chi_C(\mathcal{L}) = \chi_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-mp)) + m \deg p$  voor elke  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Bewijs.** Zij  $p$  gedefinieerd door het quasi-coherente  $\mathcal{O}_C$  ideaal  $\mathcal{O}(-p)$ . Zij  $j : p \rightarrow C$  de gesloten immersie. We hebben dan  $j_*\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_C/\mathcal{O}(-p)$  en als  $\mathcal{L}$  een lokaal vrij  $\mathcal{O}_X$ -moduul van eindig type is, dan is wegens de projectieformule

$$j_*(j^*\mathcal{L}) \cong j_*(\mathcal{O}_p) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L} \cong \mathcal{L}/\mathcal{O}(-p)\mathcal{L}.$$

De rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-p) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow j_*(j^*\mathcal{L}) \longrightarrow 0$$

is dan exact en omdat  $C$   $k$ -compleet verondersteld is zal

$$\chi_C(j_*(j^*\mathcal{L})) = \chi_C(\mathcal{L}) - \chi_C(\mathcal{O}(-p) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L})$$

en

$$\chi_C(j_*(j^*\mathcal{L})) = \chi_p(j^*\mathcal{L}).$$

noteren we  $j^*\mathcal{L}$  met  $\mathcal{L}|_p$  dan is

$$\chi_C(\mathcal{L}) = \chi_p(\mathcal{L}|_p) + \chi_C(\mathcal{O}(-p) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}).$$

Hieruit volgt (i) daar  $\chi_p(\mathcal{L}|_p) = \dim_k k(p) = \deg p$ .

(ii) halen we uit (i) door inductie op  $m$  als  $m > 0$  wegens het feit dat  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-(m-1)p)$  inverteerbaar is. Als  $m < 0$  dan passen we het voorgaande toe op  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-mp)$ . Dan is

$$\chi_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-mp)) = \chi_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-mp) \otimes \mathcal{O}(-(-mp))) - m \deg p$$

en zo  $\chi_C(\mathcal{L}) = \chi_C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-mp)) + m \deg p$ . ■

Zij  $D = \sum_{i=1}^r m_i p_i$  een divisor op  $C$ . We noteren in het vervolg  $r$  met  $r(D)$  en definiëren de graad van  $D$ ,  $\deg D$ , als  $\sum_{i=1}^r m_i \deg p_i$ . We bewijzen dan de volgende

**Stelling 24** *Zij  $D$  een divisor op  $C$ , dan*

$$\chi_C(\mathcal{O}(D)) = \deg D + \chi_C.$$

**Bewijs.** Het bewijs verloopt volgens inductie op  $r(D)$ . Als  $r(D) = 0$  dan is  $D = 0$  en gelijkheid is triviaal. Schrijf nu  $D = D_1 + mp$  voor een zekere  $m \in \mathbb{Z}, p \in C$  en  $D_1$  met  $r(D_1) = r(D) - 1$ . Wegens lemma 9.(ii), is

$$\chi_C(\mathcal{O}(D)) = \chi_C(\mathcal{O}(D_1)) + m \deg p.$$

Passen we inductie toe dan is

$$\chi_C(\mathcal{O}(D_1)) = \deg D_1 + \chi_C$$

en dus

$$\chi_C(\mathcal{O}(D)) = \deg D + \chi_C$$

■

### De zwakke vorm van de stelling van Riemann-Roch op een niet singuliere complete kromme

Voordat de formule van Riemann-Roch gegeven wordt voeren we het *rekenkundige genus* in.

**Definitie 3.3.2** *Zij  $\Gamma$  een complete kromme over een veld  $k$ . We definiëren het *rekenkundige genus*  $p_a$  van  $\Gamma$  als*

$$p_a(\Gamma) = 1 - \chi(\mathcal{O}_\Gamma) = 1 - \chi_\Gamma.$$

In onze situatie kunnen we meer zeggen. Omdat  $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k$ , is  $p_a = \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C)$ . In het geval van een niet singuliere kromme kan men bewijzen dat  $p_a$  een *birationale invariant* is, hetgeen belangrijk is met het oog op de classificatie van niet singuliere krommen.

Noteren we  $\dim_k H^1(C, \mathcal{O}(D))$  met  $i(D)$  en  $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}(D))$  met  $l(D)$  dan volgt uit stelling 23 de *zwakke vorm van Riemann-Roch* op een niet singuliere complete kromme  $C$

$$\boxed{l(D) - i(D) = \deg D + 1 - p_a(C)}$$

### De stelling van Riemann-Roch op een singuliere complete kromme

Als de kromme  $\Gamma$  singulier is, weten we uit hoofdstuk 2 dat er geen Weil divisoren op bestaan. De Cartier divisoren bestaan wel en  $\text{CaCl}(\Gamma) \cong \text{Pic}(\Gamma)$ . We stellen nu de Riemann-Roch formule op voor inverteerbare schoven op  $\Gamma$ .

Zij  $\mathcal{L}$  een inverteerbare schoof op de complete kromme  $\Gamma$ .

**Definitie 3.3.3** voor een inverteerbare schoof  $\mathcal{L}$  is  $\deg(\mathcal{L}) = \chi_\Gamma - \chi_\Gamma(\mathcal{L}^{-1})$ .

We hebben per definitie  $\chi_\Gamma(\mathcal{L}) = -\deg(\mathcal{L}^{-1}) + \chi_\Gamma$  en dus

$$\dim_k H^0(\Gamma, \mathcal{L}) - \dim_k H^1(\Gamma, \mathcal{L}) = -\deg \mathcal{L}^{-1} + 1 - p_a(\Gamma).$$

Verder is voor  $\mu : C \rightarrow \Gamma$  zoals hierboven

$$\chi_C(\mu^* \mathcal{L}^{-1}) - \chi_\Gamma(\mathcal{L}^{-1}) = \delta(\Gamma) = \chi_C - \chi_\Gamma$$

en

$$\deg \mu^*(\mathcal{L}) = \chi_C - \chi_C(\mu^*(\mathcal{L}^{-1})) = \chi_\Gamma - \chi_\Gamma(\mathcal{L}^{-1}) = \deg \mathcal{L}.$$

We willen bewijzen dat  $\deg \mathcal{L} = -\deg \mathcal{L}^{-1}$ . Omdat  $\deg \mathcal{L} = \deg \mu^*(\mathcal{L})$  kunnen we de inverteerbare schoven op  $\Gamma$  liften naar  $C$  als we alleen geïnteresseerd zijn in de graad van de schoven. Op een normale kromme is elke inverteerbare schoof te schrijven als  $\mathcal{O}(D)$  voor een zekere divisor  $D$  op  $C$ . Nu is wegens stelling 23  $\deg \mathcal{O}(D) = \deg D$ . Verder is het duidelijk dat  $\deg(D_1 + D_2) = \deg D_1 + \deg D_2$ . Dit alles maakt dat

$$\deg(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = \deg \mathcal{L} + \deg \mathcal{M}$$

voor inverteerbare schoven op  $\Gamma$ . We zien dan ook dat

$$\deg \mathcal{L} = -\deg \mathcal{L}^{-1}$$

en we hebben *de stelling van Riemann-Roch op een singuliere kromme*  $\Gamma$

$$\boxed{\dim_k H^0(\Gamma, \mathcal{L}) - \dim_k H^1(\Gamma, \mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} + 1 - p_a(\Gamma).}$$

Deze uitdrukking kan in gelijkaardige vorm geschreven worden als in de vorige paragraaf. Hiervoor bekijkt men divisoren, slechts gedefinieerd op het reguliere deel van de kromme. De drager van de divisoren bevat dus geen singuliere punten. Voor de constructie hiervan verwijzen we naar [Serre].

### 3.4 Serre dualiteit

Onder de definitieve of sterke vorm van de stelling van Riemann-Roch verstaat men de zwakke vorm van de stelling waarin het linkerlid slechts uit de dimensies van 0-de cohomologiegroepen bestaat. Om die overgang waar te maken wordt meestal gesteund op de *dualiteitsstelling* die door *Serre* in 1955 bewezen is. Om de opgave van de stelling te begrijpen hebben we het begrip van differentiaal op variëteiten nodig.

## Reguliere vormen en de canonische divisor

Zij  $X$  een gesepareerd schema over een ring  $R$ . De diagonaal afbeelding  $\Delta : X \rightarrow X \times_R X$  beeldt  $X$  af op het gesloten deelsschema  $\Delta_{X/R}(X)$  (zie definitie 1.3.10). Noteren we met  $\mathcal{I}$  het definiërend  $\mathcal{O}_{X \times_R X}$ -ideaal van  $\Delta_{X/R}(X)$ . Beschouwen we  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  dan geven we dit de structuur van een  $\mathcal{O}_X$ -moduul onder het isomorfisme  $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{X \times_R X}/\mathcal{I}$ .

**Definitie 3.4.1** Het  $\mathcal{O}_X$ -moduul  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  noemen we het  $\mathcal{O}_X$ -moduul van (kiemen van) reguliere vormen van  $X$  over  $R$ . We noteren dit moduul met  $\Omega_{X/R}$ .

Voor elke  $q \geq 0$  stellen we  $\Omega_{X/R}^q = \wedge^q \Omega_{X/R}$ . Wanneer  $X$  een  $n$ -dimensionale niet singuliere variëteit over een veld  $k$  is toont men aan dat

- (1)  $\Omega_{X/k}$  is een lokaal vrij  $\mathcal{O}_X$ -moduul van rang  $n$ ;
- (2)  $\Omega_{X/k}^n$  is een inverteerbare schoof.

Deze laatste schoof heeft een speciale rol in de dualiteits-stelling.

**Definitie 3.4.2** Zij  $X$  een niet singuliere variëteit over  $k$ . De schoof  $\Omega_{X/k}^n$  met  $n = \dim X$  wordt de *canonische schoof* van  $X$  genoemd.

Op een niet singuliere variëteit kan men aan elke inverteerbare schoof een Weil divisor hechten. In het geval van  $\Omega_{X/k}^n$  hebben we de volgende

**Definitie 3.4.3** Een divisor geassocieerd aan  $\Omega_{X/k}^n$  noemen we een *canonische divisor* op  $X$ . We noteren deze met  $K$  of  $K(X)$ .

Uit hoofdstuk 2 weten we verder dat alle canonische divisoren op  $X$  lineair equivalent zijn en ook is  $\mathcal{O}(K(X)) \cong \Omega_{X/k}^n$ .

## De dualiteits-stelling

**Stelling 25 (Serre)** Zij  $X$  een complete niet singuliere variëteit van dimensie  $n$  en zij  $D$  een divisor op  $X$ . Dan

- (i)  $H^n(X, \Omega_{X/k}^n) \cong k$ ;
- (ii) Er bestaat een natuurlijke pairing

$$H^p(X, \Omega_{X/k}^q \otimes \mathcal{O}(D)) \times H^{n-p}(X, \Omega_{X/k}^{n-q} \otimes \mathcal{O}(-D)) \rightarrow H^n(X, \Omega_{X/k}^n) \cong k$$

die niet gedegeneerd is voor alle  $0 \leq p, q \leq n$ .

Omdat voor het bewijs een zeer grondige voorkennis van homologie algebra vereist is verwijzen we naar [H]. In het geval van krommen bestaat er echter een andere, meer elementaire, bewijsmethode. We verwijzen hiervoor naar [Serre] waarin gebruik gemaakt wordt van residuën en de répartitions van Weil.

### 3.5 De stelling van Riemann-Roch voor niet singuliere krommen

De dualiteits-stelling heeft als direct gevolg voor krommen dat

$$i(D) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}(D)) = l(K(X) - D)$$

met  $K(X) = K$  de *canonische divisor* op  $X$ . Hiermee is het linkerlid uitgedrukt in dimensies van nulde cohomologiegroepen.

We hebben eerder het rekenkundige genus  $p_a$  ingevoerd. Voor een complete niet singuliere kromme  $\Gamma$  hebben we ook nog een andere birationale invariant, het *geometrische genus* genaamd.

**Definitie 3.5.1** Zij  $\Gamma$  een complete niet singuliere kromme over een veld  $k$ . We definiëren het *geometrische genus*  $p_g$  van  $\Gamma$  als

$$p_g = \dim_k H^0(\Gamma, \Omega_{\Gamma,k}).$$

Een direct gevolg van de dualiteits-stelling is dat voor *niet singuliere complete krommen* het geometrische genus  $p_g$  *gelijk* is aan het rekenkundige genus  $p_a$ . In dit geval noemen  $p_a = p_g$  het *genus*  $g$  van de kromme  $\Gamma$ . Uit het voorgaande volgt

$$\boxed{l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g}$$

hetgeen de *sterke vorm van Riemann-Roch op een niet singuliere complete kromme* is.

## BIBLIOGRAFIE

- [C] Čech E., *Topological Spaces*, Praag 1966.
- [Dieu] Dieudonné J., *Aperçu Historique sur le Développement de la Géométrie Algébrique*, Presses Univ. France, Collection Sup, 1974.
- [FAC] Serre J.P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61, 1955.
- [Fu] Fulton W., *Algebraic Curves*, Benjamin, New York, 1969.
- [G-H] Griffiths-Hartshorne, *Principles of Algebraic Geometry*, Addison Wesley, 1982.
- [H] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer verlag, 1977.
- [I] Iitaka S. *Algebraic Geometry*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics 76, Springer Verlag, 1982.
- [L] Lang S., *Algebra*, Addison Wesley, 1982.
- [Serre] Serre J.P., *Groupes algébriques et corps de classe*, Hermann, 1959.
- [Shaf1] Shafarevich I.R., *Basic Algebraic Geometry 1*, 2nd revised edition, Springer Verlag, 1994.
- [Shaf2] Shafarevich I.R., *Basic Algebraic Geometry 2*, 2nd revised edition, Springer Verlag, 1994.
- [W] Warner S., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, 1971.